# THÉORIE DES VALEURS EXTRÊMES ET COPULES

## Chapitre I : Motivations du cours

Ce cours a pour but de présenter les outils théoriques de compréhension de l'impact des événements rares sur le comportement d'observations financières.

ex : Comment modéliser les événements rare (une tornade en Vendée par exemple) pour pouvoir assurer.

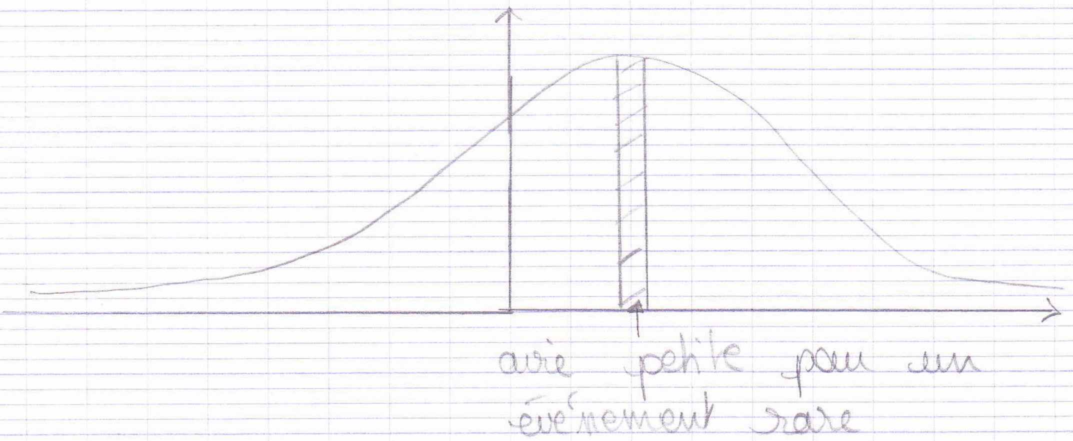
Références :

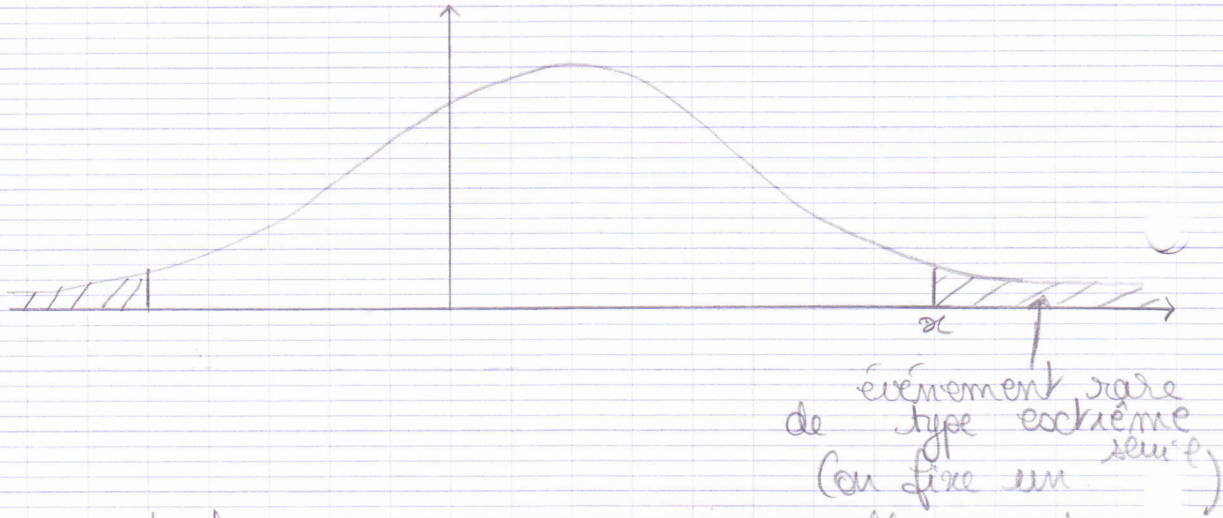
- Théorie des valeurs extrêmes, cours de Roncalli du M2 203. (internet)
- Modelling external events for insurance and finance, Embrechts, Klüppelberg & Mikosch.
- An introduction to copulas, Nelsen.

## I Événements rares et temps de retour.

événement rare = événement dont le temps de retour est grand, dont la fréquence est faible.

Un événement rare est un événement dont la probabilité d'occurrence est petite.



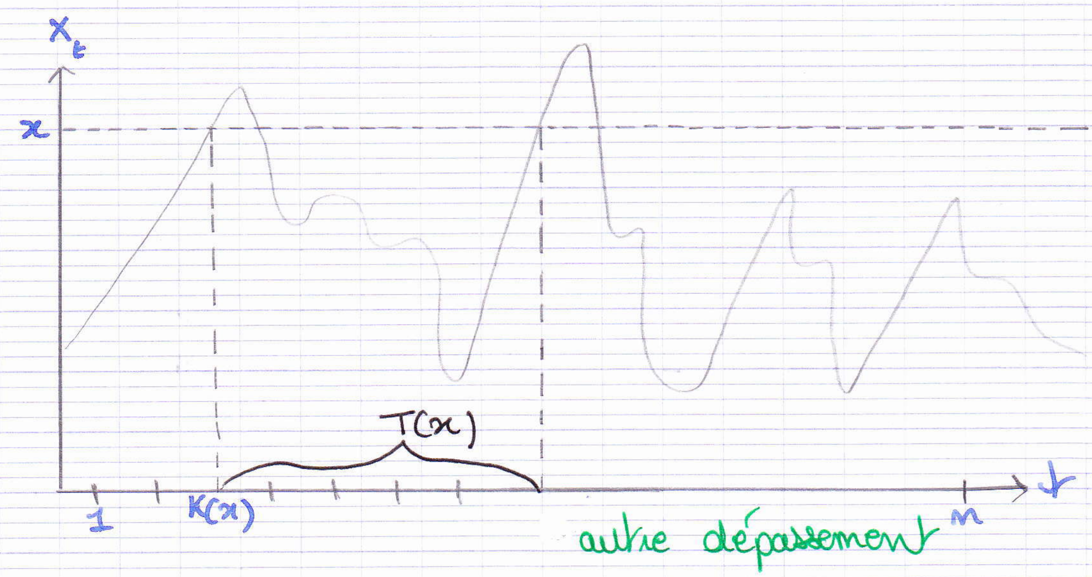

on peut le rendre aussi rare que l'on veut, il suffit de prendre un seuil assez grand.

Ici, on se borne qu'à une seule observation.

On s'intéresse aux événements rares dits extrêmes de la forme $\{X > x\}$ ($x$ = seuil).

Maintenant, on va se borner à $n$ observations.

Soit $p = \mathbb{P}(X > x) = 1 - F(x)$ la probabilité de dépasser le seuil $x$.




Soit le premier excès :

$$K(x) = \min \{ t \geq 1, \; X_t \geq x \}$$

convention: $\min \emptyset = -\infty$

$K(x)$ n'est pas une fonction dépendant de $x$ mais une variable aléatoire (d'indice $x$).

ex 1: Montrer que la loi de $K(x)$ est la loi géométrique de paramètre $p$.

def: Le temps de retour $T(x)$ des évènements rares $\{ X_i \geq x \}$ est le temps d'attente moyen entre deux dépassements.

$T(x)$ est aussi une variable aléatoire.

ex 2: Montrer que $T(x) = \mathbb{E}[K(x)] = \dfrac{1}{1 - F(x)}$ lorsque $(X_t)$ sont iid.

Rq: Le temps de retour est directement lié à la fonction de répartition d'une observation de $X_t$.

⚠ (imp) En général, les $(X_t)$ sont iid.

**def:** La "Value at Risk" (Var) pour un niveau de couverture $\alpha$ est le quantile de la distribution : $Var = F^{-1}(\alpha)$.

**Rq:** $T(Var)$ = temps de retour de la Var
$= \frac{1}{1-\alpha}$.

Plus le niveau de couverture est élevé, plus le temps de retour de l'évènement de dépasser le seuil $\alpha$ est grand.

Par exemple, le temps de retour implicite des différents ratings.

pour une période de détention de 1 jour

| Rating | Risque du marché | BBB | A | AA | AAA |
|---|---|---|---|---|---|
| Niveau de couverture | 99 % on investit dans un produit relativement sûr | 99,75% risque ⊖ élevé que sur le marché | 99,9% | 99,95% | 99,97% |
| Temps de retour (de l'évènement rare) | 100 jours on se place sur un évènement rare dont l'occurence est de 100 jours | 400 jours temps de retour ⊕ grand que celui du marché | 4 ans | 8ans | 13ans |

Si on investit sur un produit noté AA, le temps de retour de l'évènement rare est de 8 ans.
ex: défaut de paiement d'un institut pour un prêt

A moyen terme (1 an), il ne semble pas nécessaire de couvrir les défaillances des lignes de créance notées > BBB.
prob : Un portefeuille contient plusieurs produits donc plusieurs lignes de créance et non une seule ligne de créance : quand on constitue un portefeuille, on fournit des ordres dès le début. ainsi, lorsqu'il y a un investisseur pour ce portefeuille, il regarde ces lignes de créances. Ces ordres sont mis à jour au fur et à mesure. Le problème est lorsque le temps de retour est dépassé et que l'institut concerné n'a pas fait défaut.

Néanmoins, un portefeuille de crédit d'une banque comprend des milliers de lignes de créances !

Si on investit dans 2 produits différents indépendants (ex : pétrole, éolien), le temps de retour peut augmenter mais si on investit dans des produits notés différemment mais dépendants, on peut multiplier le risque, par exemple, une entreprise 1 notée AAA est liée à une entreprise 2 notée AA, si 2 plonge il se peut que le temps de retour de 1 soit inférieur à 13 ans.

Pour déterminer le risque de défaillance d'un portefeuille à moyen terme, il faut étudier la dépendance entre les $\underbrace{\text{valeurs extrêmes}}_{\text{temps de retour}}$ des différentes lignes de créances.

Une solution possible est les copules mais elles ne peuvent déterminer que la dépendance entre 2 lignes de séance.

## II Le temps de retour des rendements.

Soit $r$ le log-rendement du CAC40 :

$$r_t = \log\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)$$

où $(P_t)$ est l'indice du CAC40.

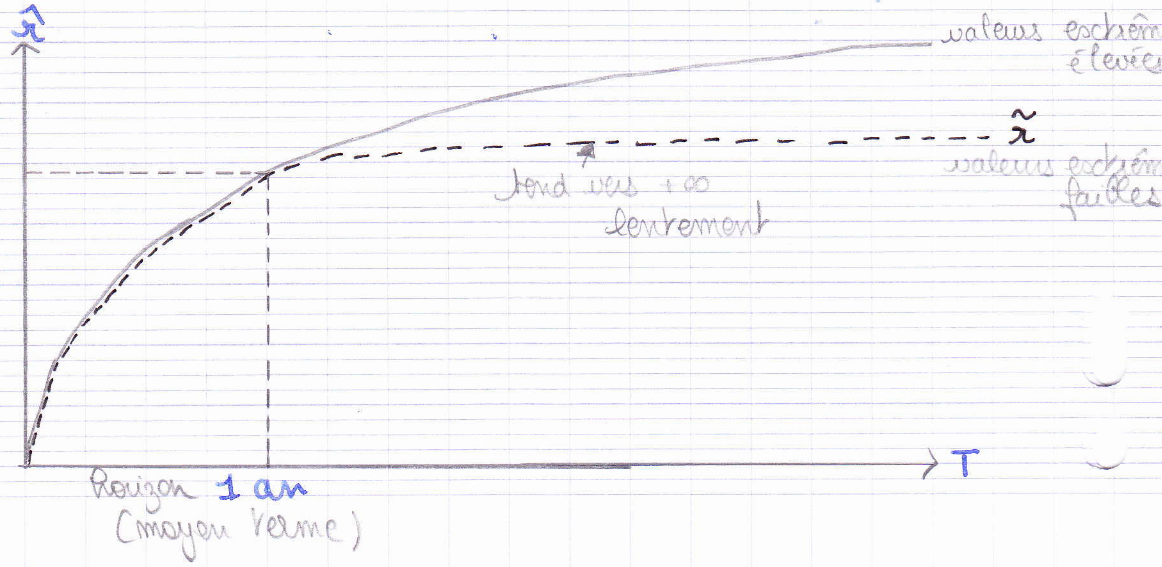
On sait que le temps de retour de l'évènement $\{r_t > r\}$ vaut : $T = \dfrac{1}{1 - F(r)}$

d'où : $r = F^{-1}\left(\dfrac{T-1}{T}\right)$. est le rendement implicite à un temps de retour donné.

$F$ = fonction de répartition de $(r_t)$ iid

$F$ inconnue.

On estime $\hat{r}$ de manière non-paramétrique.



$r_t$ = discrétisation du modèle Black & Scholes donc $r_t$ doit suivre une gaussienne.

Si on considère que F est une gaussienne, on obtient $\tilde{r}$ estimation paramétrique de $r$ : les événements rares de type extrême sont alors sous-évalués.
On modélise très bien les évènements qui arrivent souvent (qui sont autour de la moyenne) mais on sous-estime les valeurs extrêmes et l'importance des évènements rares.

Quelles distributions marginales tiennent compte d'un tel comportement ?

CAC40 est un agrégat de différents indices (ex: S&P 500) donc avec le TCL, on peut avoir une loi normale.
(agrégat = réunion d'un ensemble massif d'éléments hétérogènes).

Références :

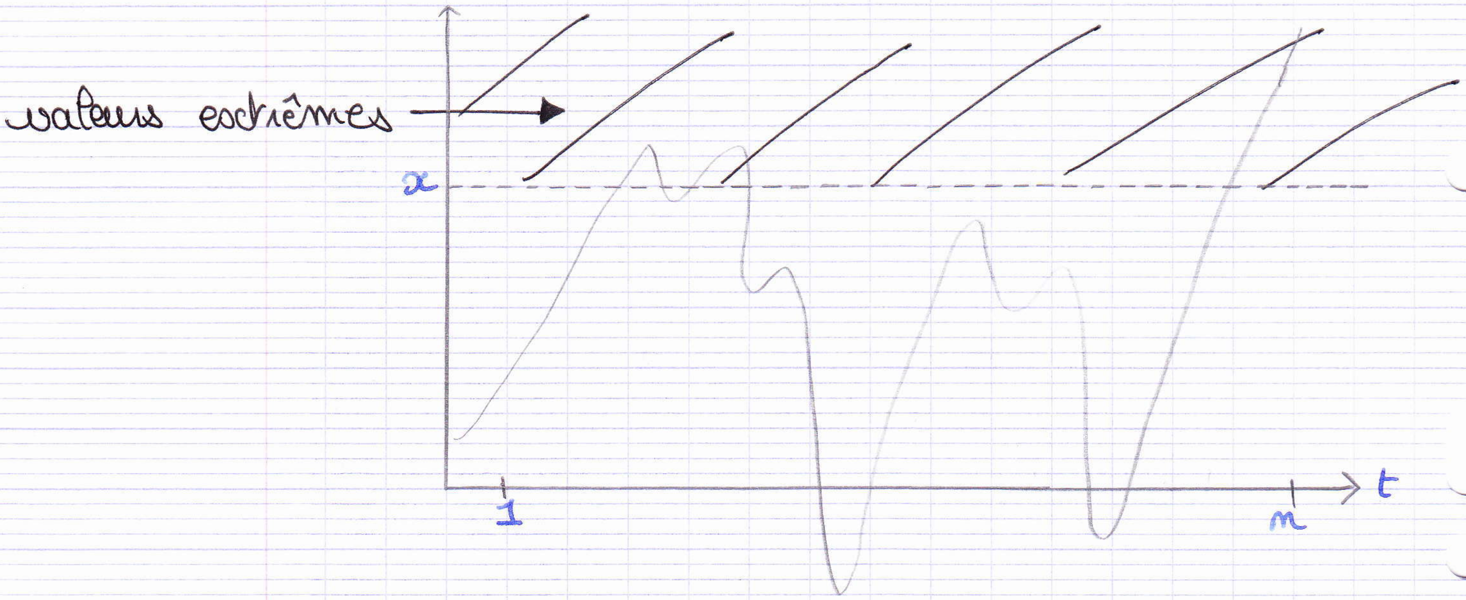

- 332-3 Denis & Charpentier.
- 658.016 Roncalli.
- www. bf. refer. org / barro /

Chapitre II :
Théorie des valeurs extrêmes.

# I Lois de la famille sous-exponentielle.

## A - Définitions.

Soit $(X_t)$ une suite iid de fonction de répartition F dans $\mathbb{R}$.




Pour la gaussienne, si on fixe le seuil loin de la moyenne, on observe un temps de retour de 1000 ans

Que la moyenne soit nulle ou non, au bout d'un moment les queues de distribution seront les mêmes.
donc, en général, on considère / suppose $\mathbb{E} = 0$
ex: CAC40 qui augmente de 4% n'arrive jamais avec la gaussienne car 4% est une

valeur extrême (événement rare)

On note : → $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ le maximum des observations $(X_1, \dots, X_n)$ (événement rare mais qui arrive une fois au moins)

→ $S_n = \sum_{t=1}^{n} X_t$ la somme partielle de $(X_t)$.

Rq : $\{X_t \geq M_n\}$ est un événement rare ; il arrive au moins une fois à l'horizon de temps $\{1, \dots, n\}$.

déf : Une loi F fait partie de la famille des lois sous-exponentielles notée S ssi $\forall n \geq 2$,

$$\underbrace{\mathbb{P}(S_n > x)}_{\text{comportement extrême globale}} \sim \underbrace{\mathbb{P}(M_n > x)}_{\text{comportement extrême maximale}}$$

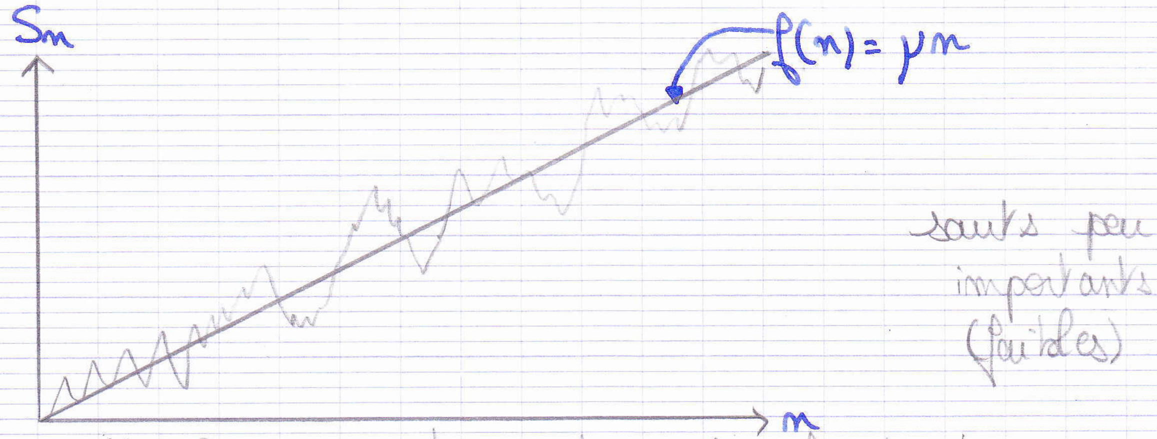
quand $x \longrightarrow +\infty$.

pour $n=1$, toujours vraie : $S_1 = M_1$

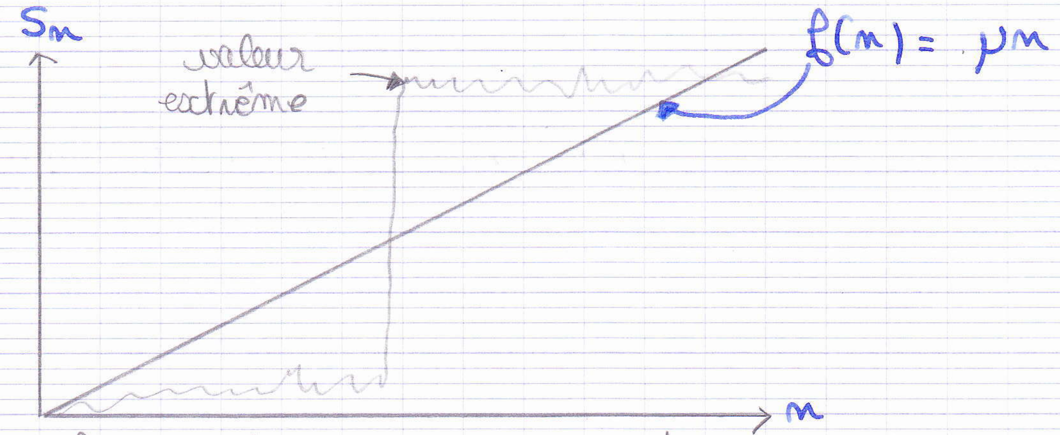
La somme partielle tend vers $+\infty$, elle ausculte la dépendance en $n$.

Rq : • La loi des valeurs extrêmes de la somme $S_n$ est complètement déterminée par la loi des extrêmes du maximum uniquement.

• On dit aussi que F est une loi à queue de distribution épaisse ou lourde ($1 - F(x)$ décroît lentement).




→ si l'espérance $\mu$ est positive, les fluctuations sont croissantes.
→ pente = moyenne = $\mu$ (à cause du LFGN)
→ $(S_n)$ fluctue de manière uniforme autour de la droite $\mu n$ (ex: $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ avec $\sigma > 0$).
→ LFGN: $\frac{1}{n} S_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mu \Rightarrow S_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mu n$




→ c'est la valeur extrême qui va déterminer le comportement globale de la somme partielle dans ses extrêmes.
→ $(S_n)$ fluctue avec des sauts autour de $n \mapsto \mu n$.
→ ex: $X \sim$ lognormale de moyenne $\mu > 0$. (cas sous-exponentiel).

Rq: somme partielle = estimation de la droite $\mu n$ car $\frac{1}{n} S_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mu$ d'après LFGN donc

$F_1 * F_2(x) = \mathbb{P}(X_1 + X_2 \leq x)$

$S_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mu n.$

Si $F \in S$, le processus des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a des "sauts" importants.

notation: → Si $F_1$ et $F_2$ sont 2 fonctions de répartition, on note $F_1 * F_2$ le produit de convolution:

$$F_1 * F_2(x) = \int_{\mathbb{R}} F_1(x-y)\, F_2(y)\, dy$$

donc si $X_1 \perp\!\!\!\perp X_2$, $X_1 \sim F_1$ et $X_2 \sim F_2$ alors $X_1 + X_2 \sim F_1 * F_2$

→ $F_1^{n*} = \underbrace{F_1 * F_1 * \dots * F_1}_{n \text{ fois}}$

→ $\overline{F_1} = 1 - F_1$ est la queue de distribution de $F_1$.

exc 3: → Montrer que $\mathbb{P}(S_n > x) = \overline{F_1^{n*}}(x) =$ queue de distribution de la convolée n fois.

→ Montrer que $\mathbb{P}(M_n > x) \sim n\,\overline{F}(x)$ quand $x \longrightarrow +\infty$.

prop: $F \in S \iff \forall n \geq 2, \ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\overline{F^{n*}}(x)}{\overline{F}(x)} = n.$

(Les valeurs extrêmes sont déterminées par $n\,\overline{F}(x)$)

exc 4: Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\overline{F^{n*}}(x)}{\overline{F}(x)} = +\infty$ quand $F \sim \mathcal{N}(0,1)$. (Rq: $\mathcal{N}(0,1) \notin S$). ($\Rightarrow$ le maximum de la loi normale est trop petite)

Rq: $F^{n*} = \mathcal{N}(0,n)$ si $F \sim \mathcal{N}(0,1)$

(très imp) ⚠ B- Fonctions à variation régulière $R_\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$)

$\alpha$ = indice de variation

- cas $\alpha = 0$ :

$R_0$ est appelé l'ensemble des fonctions à variations lentes.

def : Une fonction $f \in R_0$ ssi $\forall t > 0$,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(tx)}{f(x)} = 1.$$

ex 5 : → Montrer que si $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} c$ alors $f \in R_0$.

→ Montrer que $f(x) = (\ln(x))^\beta$ $\forall \beta \geq 0$ est à variation lente.

- cas $\alpha \in \mathbb{R}$ quelconque :

def : Une fonction $f \in R_\alpha$ ssi

$$f(x) = x^\alpha L(x) \text{ avec } L \in R_0.$$

def : Une loi est à variation régulière d'indice $\alpha \geq 0$, noté $F \in RV(\alpha)$ ssi $1 - F = \bar{F} \in R_{-\alpha}$ ($\Leftrightarrow$ $\bar{F} \in R_\alpha$, $\alpha \leq 0$)

⚠ → Le $\alpha$ de cette définition est différente de celle d'une fonction car pour une fonction, $\alpha \in \mathbb{R}$ alors que pour une loi, $\alpha \geq 0$.

→ Une queue de distribution ne peut pas être d'indice $\alpha > 0$ car sinon $\bar{F}(x) \underset{x \to +\infty}{\not\to} 0$

prop : Si $F_1$ et $F_2 \in RV(\alpha)$ alors $F_1 * F_2 \in RV(\alpha)$,

$\forall\ \alpha \geq 0$ et $\overline{F_1 * F_2}(x) = x^{-\alpha}(L_1(x) + L_2(x))$
avec $\bar{F}_1(x) = x^{-\alpha} L_1(x)$ et $\bar{F}_2(x) = x^{-\alpha} L_2(x)$

<u>th</u>: $\forall\ \alpha \geq 0,\ RV(\alpha) \subset S$.

prop $\Rightarrow$ somme $S_n$ est comparable avec ce qu'il y a au départ, ce qui n'est pas le cas pour la normale car $\mathcal{N}(0,1) + \mathcal{N}(0,1) = \mathcal{N}(0,2)$.

<u>ex 6</u>: <u>preuve du théorème</u>. (voir bouquin)

→ <u>étape 1</u>: $\bar{F}^{n*} \in R_{-\alpha}$

→ <u>étape 2</u>: $\bar{F} \in R_{-\alpha} \Rightarrow \dfrac{\bar{F}^{n*}}{\bar{F}} \longrightarrow$ constante $= n$

($n$ est fournit par la variation lente).

## C - <u>Exemples de lois sous-exponentielles</u>.

<u>Parmi $RV(\alpha)$</u>: → <u>Pareto</u> $(\alpha, K)$ :

$\bar{F}(x) = \left(\dfrac{K}{K+x}\right)^{\alpha}$, $\forall \alpha \geq 0$, $K > 0$ et $x > 0$

queue de distribution

variation lente

→ <u>Burr</u> $(\alpha, \tau, K)$

$\bar{F}(x) = \left(\dfrac{K}{K+x^{\tau}}\right)^{\alpha/\tau}$, $\forall\ \alpha \geq 0$, $K \geq 0$, $\tau > 0$ et $x > 0$

si $\left(\dfrac{K}{K+x^{\tau}}\right)^{\alpha}$ alors $RV(\tau\alpha)$ donc $\tau\alpha =$ indice de variation lente

<u>Lois dont la queue de distribution $\bar{F} \notin R_{-\alpha}$</u>:

→ <u>Weibull</u>: $\bar{F}(x) = e^{-cx^{\tau}}$ pour $c > 0$ et $0 < \tau < 1$

→ <u>log-normale</u>: $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma x} \exp\left(-\dfrac{(\ln(x) - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$

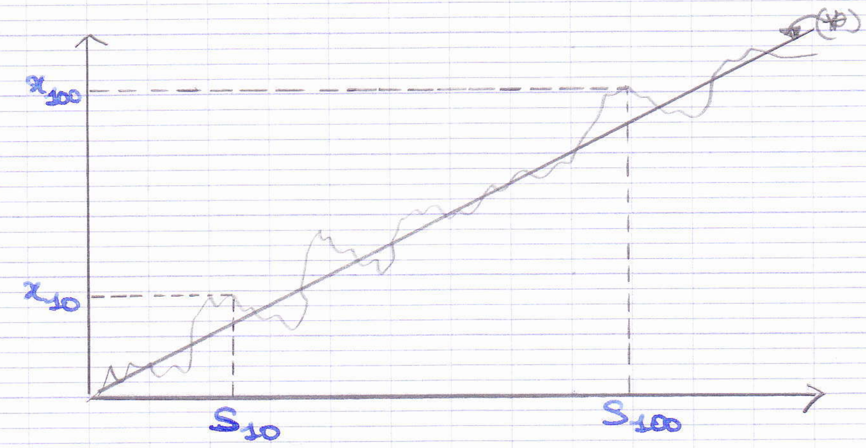
pour $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$.

__exc 7:__ Montrer que $X \sim$ lognormale $(\mu, \sigma^2)$
$\Leftrightarrow \log X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

## II Principe des grandes déviations.

$n$ = indice de temps sur lequel on regarde.
(On fait désormais dépendre $x$ de $n$ et on fait tendre $n$ et $x$ vers l'infini.)

$x$ = valeur extrême
$f(x)$ = densité = probabilité d'avoir $x$.




__def:__ La moyenne empirique vaut : $\overline{X}_n = \frac{1}{n} S_n$

$\Rightarrow$ la droite (*) devient une constante et on a moins de dépendance entre $x$ et $n$.

__th:__ Loi Forte des Grands Nombres (LFGN) :
$\mathbb{E}[|X|] < +\infty \Leftrightarrow \overline{X}_n \xrightarrow[n \to +\infty]{p.s.} \mu = \mathbb{E}[X]$
($\Leftrightarrow$ loi intégrable)
(condition nécessaire et suffisante)

autrement dit : LFGN $\Leftrightarrow \overline{X}_n = \mu + \underbrace{o_{p.s.}(1)}$
v.a. qui p.s. est négligeable par rapport à 1 donc tend vers 0.

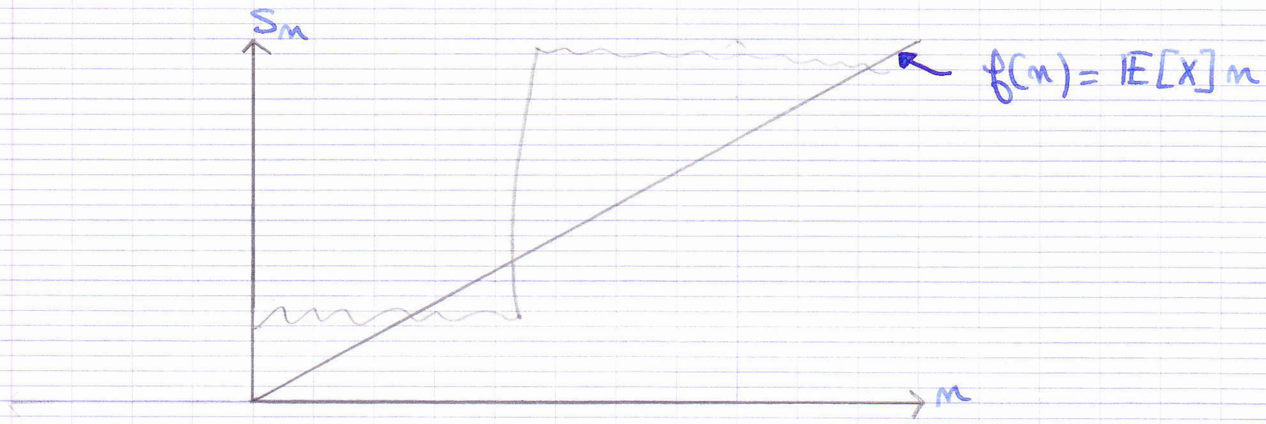
<u>Rappel</u>: <u>def</u>: (notation de Landau):

→ $\underbrace{X_n}_{\text{suite bornée}} = o_{p.s.}(Y_n) \Leftrightarrow \frac{X_n}{Y_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{p.s.} 0$

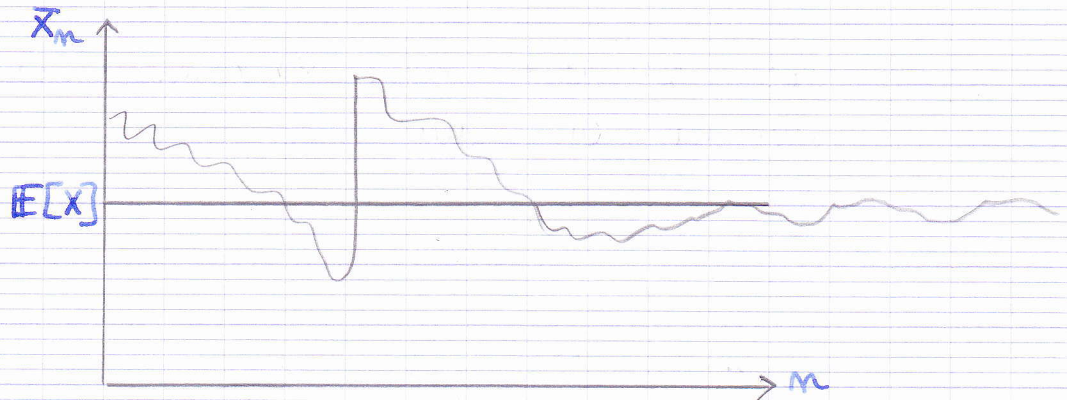
→ $X_n = O_{p.s.}(Y_n) \Leftrightarrow \exists K > 0$ tel que :
$\mathbb{P}(X_n \leq K Y_n, \forall n) = 1$.

<u>Rq</u>: $o \Rightarrow O$

$X \sim$ log-normale $(\mu, \sigma^2)$ (espérance équivalente $>0$)
$\mathbb{E}[X] = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$



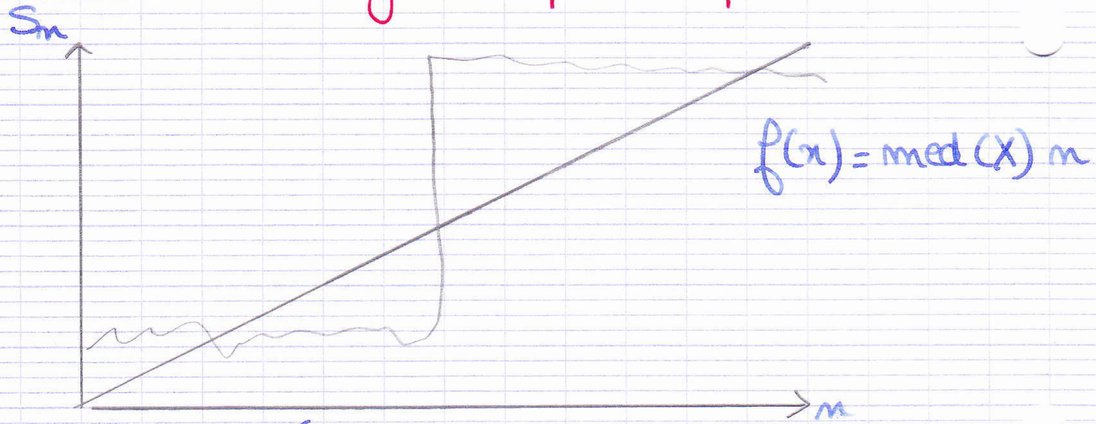

$X$ est <u>intégrale</u> (à vérifier : $\mathbb{E}[|X|] < +\infty$) donc :



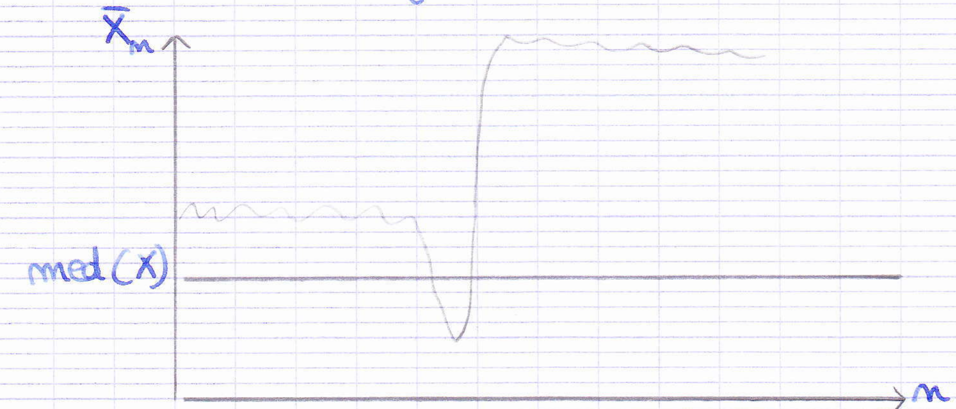

on est sûr de se rapprocher de la moyenne.

<u>contre-exemple:</u> (⚠ à savoir) Cauchy $\in RV(1) \subset S$
(essayer de simuler $S_n$ avec $F \sim$ Cauchy sous R).

⚠ La loi de Cauchy n'a pas d'espérance.




X n'est pas intégrable ($\mathbb{E}[X] = \infty$).




Les sauts sont tellement importants qu'on ne va pas se rapprocher de la médiane.

ccl°: La différence est donc dans l'ordre de grandeur du saut.

→ Cauchy: ordre de grandeur $> n$, $\overline{X}_n$ continue à fluctuer.

→ Log-normale: ordre de grandeur $< n$, donc quand on divise $S_n$ par $n$, les sauts sont écrasés.

Le processus des sommes partielles a des "sauts" d'ordre $> n$ (pour Cauchy).

Th: Loi Forte des Grands Nombres de Marcinkiewicz-Zygmund:

$\forall p \in ]0,2[$, $\bar{X}_n = a + o_{p.s.}\left(n^{\frac{1}{p}-1}\right) \Leftrightarrow \mathbb{E}[|X|^p] < +\infty$

avec $a = \begin{cases} \mathbb{E}[X] & \text{si } p \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Si $a = \mathbb{E}[X] = 0$ pour $p \geq 1$, il faut renormaliser $S_n$ par $n^{\frac{1}{p}}$ pour obtenir quelque chose.

**Rq:** Si, pour $p \geq 1$, $\mathbb{E}[X] = 0$ alors

$$\frac{S_n}{n^{\frac{1}{p}}} = o_{p.s.}(1) \Leftrightarrow \underbrace{\mathbb{E}[|X|^p]}_{\text{condition de moment d'ordre } p} < +\infty \quad \forall p \in ]0,2[$$

donc on renormalise $\bar{X}_n$ par $n^{\frac{1}{p}-1}$

Rq: dès que l'espérance existe, on suppose qu'elle est nulle car, en queue de distribution (c'est-à-dire en $+\infty$), que la moyenne soit nulle ou pas, cela n'a aucun impact car la densité se rapproche.

but: On veut savoir le niveau des sauts des sommes partielles:

ex: $\mathbb{E}[X] = 0$ pour $p \geq 1$, dès que $X$ est intégrable d'ordre $p$, l'ordre des sauts est de $n^{\frac{1}{p}}$.

Plus on a des moments d'ordre $p$ importants, plus la taille des sauts est petite.

Les sauts dans le processus de sommes partielles $S_n$ peuvent être d'un ordre aussi grand que l'on veut au-dessus de $\sqrt{n}$. ($\Rightarrow$ ordre de taille des sauts minoré par $\sqrt{n}$)

**Q:** Que se passe-t-il pour $p \geq 2$?

Dès que la variance existe, les sommes partielles

ont des sauts d'ordre $\sqrt{n}$ (LFGN)
Il y a une différence lorsque la variance n'existe pas.

__Rappels__: On s'intéresse au comportement et à l'influence des événements rares (temps de retour élevé) de type extrême : $\{X > x\}$.
Soit $(X_i)$ iid (cas simpliste), $(S_n)_n$ le processus des sommes partielles $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ et $(M_n)_n$ le processus des maximas $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$
($M_n$ est un événement rare)
A n fixé ($n \geqslant 2$), lorsque le comportement des extrêmes de la somme est déterminé uniquement par celui des extrêmes du maxima, la loi est dite sous-exponentielle : $\forall n \geqslant 2,\ \frac{\mathbb{P}(S_n > x)}{\mathbb{P}(M_n > x)} \underset{x \to +\infty}{\sim} 1$
On peut également travailler avec des minimas, il suffit de mettre des $-$ partout.
(gaussienne ne fait pas partie des lois sous-exponentielles).
Il faut trouver un majorant de l'ordre de grandeur du seuil, cela dépend de l'ordre de la régularité
Pour choisir le niveau du seuil $x$, on étudie l'ordre de grandeur des fluctuations de $S_n$. (on étudiera que pour $n$ grand car grâce au TCL et LFGN, on connait le comportement asymptotique de $(S_n)$) (autour de la moyenne si elle existe).
__Th__: (LFGN de Marcinkiewicz-Zygmund) :
$\forall p \in ]0, 2[$, si $\mu = \mathbb{E}[X] = 0$ lorsqu'elle existe
alors : $S_n = o_{p.s.}(n^{\frac{1}{p}}) \Leftrightarrow \mathbb{E}[|X|^p] < +\infty$
(régularité d'ordre $p$)

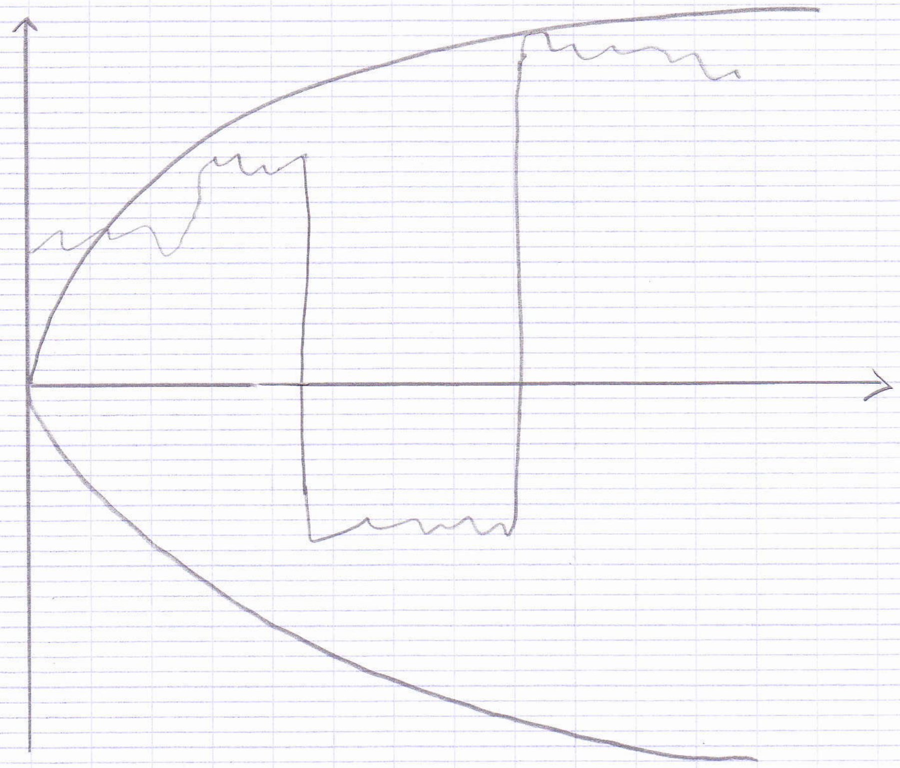
En général, lorsqu'on dépasse un seuil $x$, il n'est pas intéressant de regarder ce qui se passe en moyenne, on retranche donc la moyenne.


$p$ proche de 2

ex : loi gaussienne $\mathcal{N}(0,1)$ $(X \sim \mathcal{N}(0,1))$

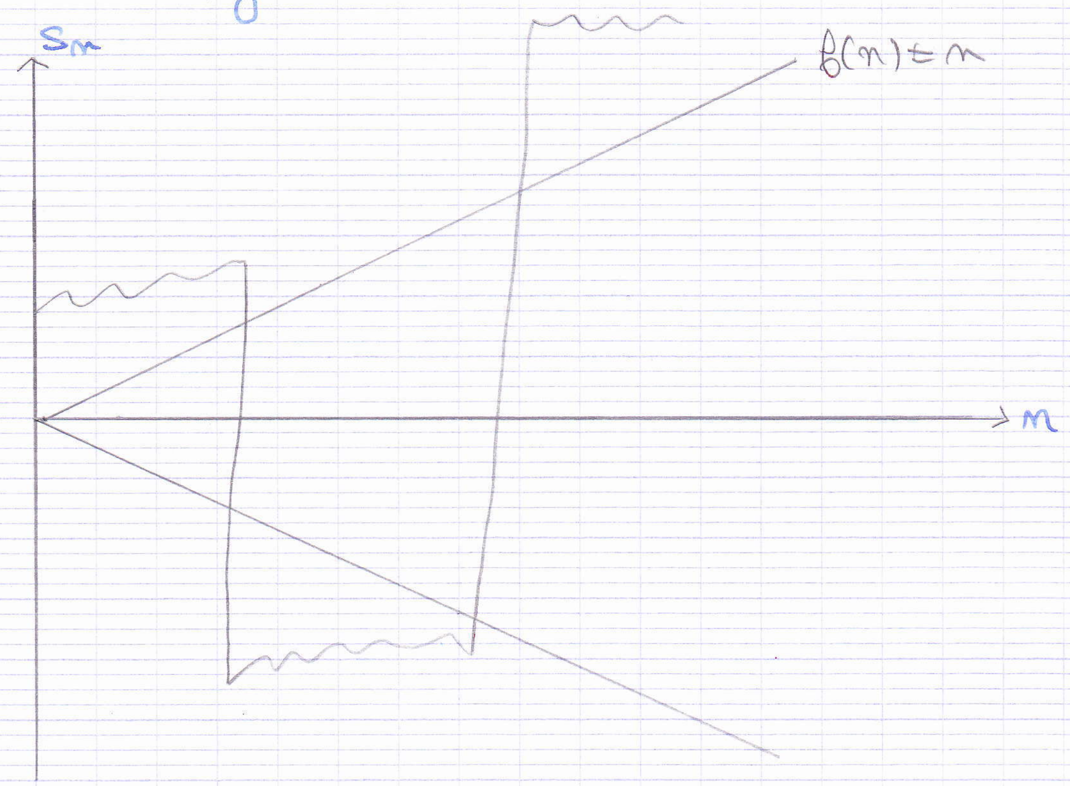
Visuellement, le processus des sommes partielles n'est pas dirigé par des grands sauts.
Au début, il peu avoi des grands sauts mais à l'infini, la somme partielle reste dans l'enveloppe
Comme elle à une variance, pour tout $p \in ]0,2[$ elle est régulière.

exc: $X \sim$ log normale



A n fixé, sur le comportement global, les sauts déterminent la loi.
Mais à l'asymptotique, les sauts restent encadrés par l'enveloppe.
X suit une loi sous-exponentielle
$\mathbb{E}[|X|^p] < +\infty \quad \forall p \geq 0$
Elle a la même enveloppe que $\mathcal{N}(0,1)$

**ex :** $X \sim$ Cauchy.



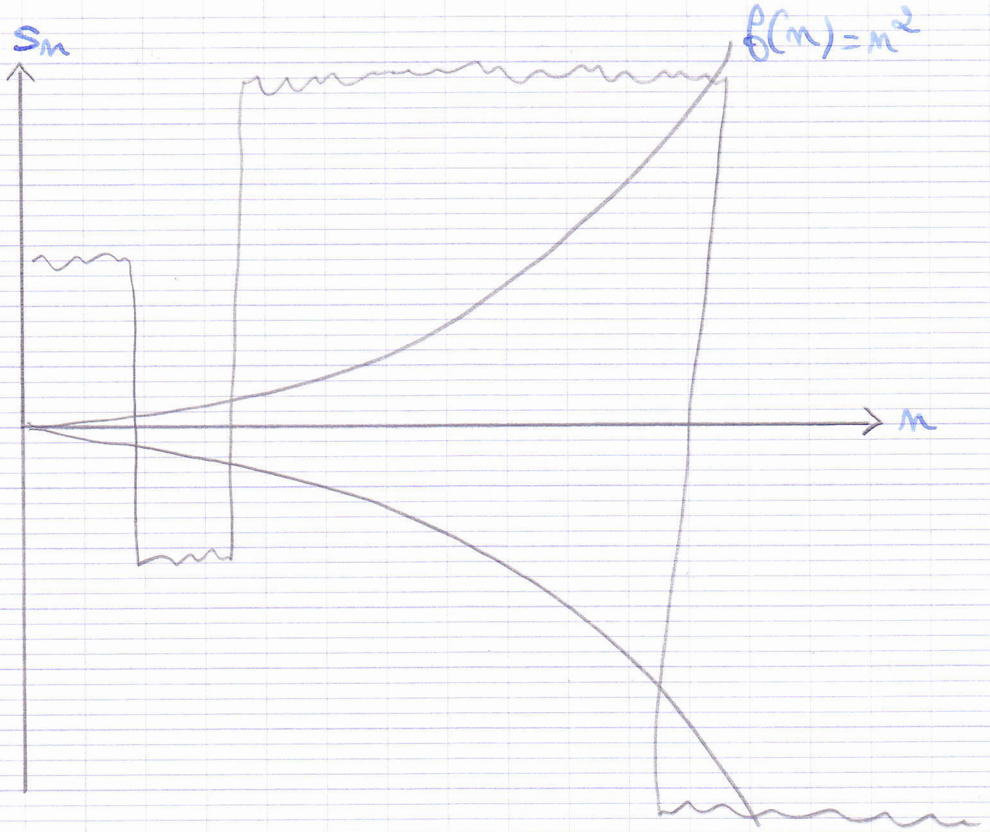

Bien souvent, on connait le premier ordre qui n'existe pas, ici $p=1$.
On n'est pas inclus dans l'enveloppe $n \mapsto n$
$\mathbb{E}[|X|^p] < +\infty \quad p < 1$

**Rappel :** pour Cauchy, $\mathbb{E}[X] = +\infty$ donc $\bar{X}_n \underset{n \to +\infty}{\not\to} \mu \quad \forall \mu \in \mathbb{R}$.

**ex 8 :** $X \sim$ Pareto $\left(\frac{1}{2}, K\right)$. Vérifier que $\mathbb{E}[X^p] < +\infty$ $\forall p < \frac{1}{2}$.

Ordre de régularité $< \frac{1}{2} \Rightarrow$ sauts aussi élevés que l'ordre $n^2$ donc dépasse l'enveloppe

On sait qu'on sort de l'enveloppe grâce au th LFGN de Marcinkiewicz - Zygmund : si $\exists p \in ]0,2[$ tq $\mathbb{E}[|X|^p] = +\infty$ alors $\forall q \geq p$, on sort de l'enveloppe.




## B - Convergence en loi.

**def:** Soit $X$ une v.a. alors la fonction qui à $t \in \mathbb{R}$ associe : $\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] \in \mathbb{C}$. est appelée fonction caractéristique.

**def:** (th de continuité de Levy): Une suite $(X_n)$ converge en loi vers $X$ ssi $\varphi_{X_n}(t) \longrightarrow \varphi_X(t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$. (convergence ponctuelle des fonctions caractéristiques $\Leftrightarrow$ convergence en loi).

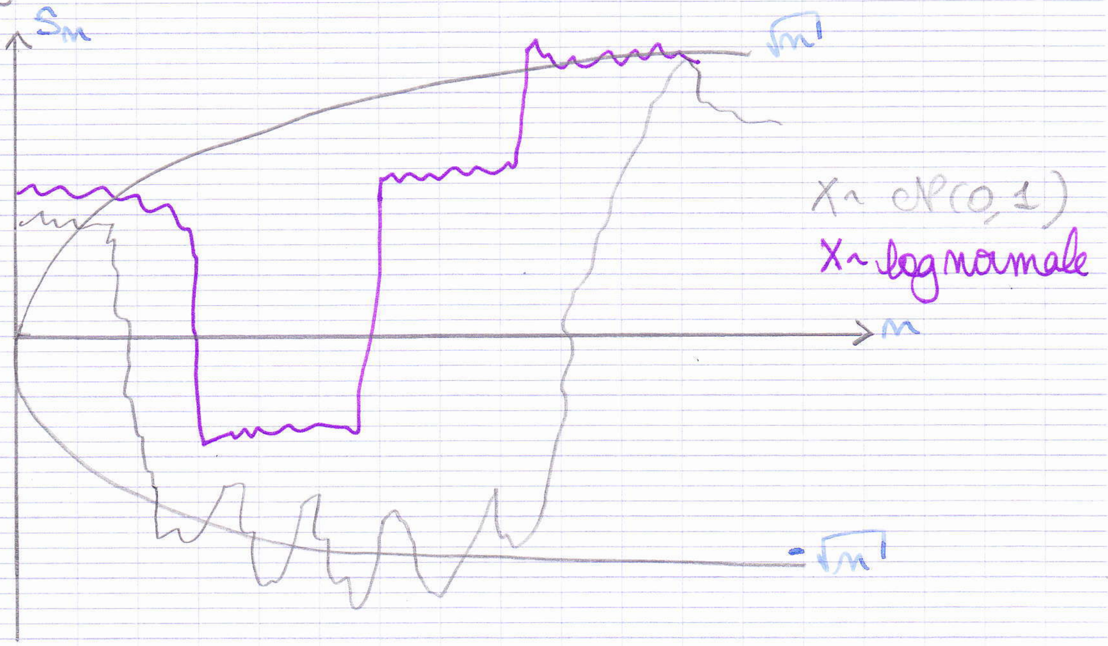
**exo 9 :** Montrer que $\varphi_{S_n} = (\varphi_X)^n$.

**th:** (Théorème Limite Centrale (TCL)): Si $\mu = \mathbb{E}[X] = 0$, $\exists v > 0$ tel que :

$$\frac{1}{\sqrt{n}} S_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, v) \Leftrightarrow \mathbb{E}[|X|^2] < +\infty$$

Le bon ordre pour fixer le seuil est exactement $\sqrt{n}$.
→ si seuil d'ordre plus faible, on tend vers $+\infty$.
→ si seuil d'ordre plus élevé on tend vers 0.

**Rq:** Pour une v.a. de régularité d'ordre 2, l'ordre de grandeur des seuils $x$ à considérer est $\sqrt{n}$. (que ce soit pour la loi normale ou la loi lognormale).




Une pareto (4,.)(une loi sous-exponentielle), asymptotiquement, le niveau des seuils est d'ordre $\sqrt{n}$ (due à l'attraction de la loi normale). $\mathbb{E}[|X|^p] < +\infty$ $\forall p < 4$. ordre de $\sqrt{n}$ car son moment d'ordre 2 existe.

**Rq:** Dès que la variance est finie, les fluctuations de $S_n$ sont d'ordre $\sqrt{n}$ et ceci quelque soit l'ordre de régularité $p$ ($p \geq 2$) de la loi!
$\{S_n > x\}$ : l'ordre du niveau du seuil $x$ ne dépend pas de la loi de $X$.

Th : (Principes des grandes $\overbrace{\text{déviations}}^{\text{seuils}}$) (Cramer) :
On considère un niveau de seuil $x = \underbrace{\sqrt{n}}\, x_n$
avec $x_n \longrightarrow +\infty$. $\underbrace{(x_n = o(n^{\frac{1}{6}}))}$ ordre de grandeur
($x_n \to +\infty$ beaucoup moins vite que $\sqrt{n}$) des fluctuations
alors : $\displaystyle \lim_{n \to +\infty} \frac{\mathbb{P}(S_n \geq \sqrt{n}\, x_n)}{1 - \Phi(x_n/\sigma)} = 1.$

où : → $\Phi$ est la fonction de répartition d'une $\mathcal{N}(0,1)$.

→ $\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$.

→ $\mu = \mathbb{E}[X] = 0$.

dès que la condition de Cramer est vérifiée :
$\exists\, \gamma > 0$ tq $\mathbb{E}[\exp(\gamma |X|)] < +\infty$ (régularité exponentielle).

Le comportement des extrêmes globaux dépend d'une loi normale et non plus du comportement des maxima ⇒ cas à éviter et nous intéresse peu (car ne sont pas des évé rares)

**ex 10** : • Montrer que sous la condition de Cramer, $\mathbb{E}[|X|^p] < +\infty \quad \forall p > 0$. (astuce : Jensen)

• Montrer que la condition de Cramer est satisfaite pour $\mathcal{E}xp(1)$ et $\mathcal{N}(0,1)$.

Rq : → Pour "nous" (pour les lois classiques), la condition de Cramer n'est pas satisfaite par les lois sous-exponentielles et les lois qui vérifient la condition de Cramer ne sont pas sous-exponentielles.

→ Pour les lois qui satisfont la condition de Cramer, les extrêmes des sommes partielles sont déterminés par le comportement des extrêmes de la loi normale limite dans le TLC.

→ Le ratio de Mills (la queue de distribution de la loi gaussienne n'a pas de forme analytique

car c'est une intégrale n'ayant pas de primitive connue)
nous donne :

$$1-\Phi\left(\frac{x_n}{\sigma}\right)=\int_{x_n/\sigma}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}\,x_n}\exp\left(-\frac{x_n^2}{2\sigma^2}\right)$$

Rappel: $\mathbb{P}(X\leq x_n/\sigma)=\mathbb{P}(\sigma X\leq x_n)=\Phi\left(\frac{x_n}{\sigma}\right)$
donc $X\sim\mathcal{N}(0,\sigma^2)$

à comparer avec $\mathbb{P}(M_n>x)$ dans le cas gaussien:

$$\mathbb{P}(M_n>x)=\mathbb{P}(M_n>\sqrt{n}\,x_n)$$

$$\xrightarrow{\text{exo } 3}\underset{n\to+\infty}{\sim} n\,\mathbb{P}(\sigma N>\sqrt{n}\,x_n)$$

$$\underset{n\to+\infty}{\sim}\sqrt{n}\,\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}\,x_n}\exp\left(-\frac{n\,x_n^2}{2\sigma^2}\right).$$

on est dans le cas $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$, $X=\sigma N$ avec $N\sim\mathcal{N}(0,1)$.

exo 11: $\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sqrt{n}}{x_n}\exp\left(-\frac{n\,x_n^2}{2\sigma^2}\right)=o\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}\,x_n}\exp\left(-\frac{x_n^2}{2\sigma^2}\right)\right)$

Rq: Donc les évènements rares de type $\{M_n>\sqrt{n}\,x_n\}$ sont négligeables par rapport au comportement limite $\{\sigma N>x_n\}$ fournit par le TLC.

## C- Lois stables.

variance $=+\infty$ $\Rightarrow$ ordre des fluctuations $>\sqrt{n}$.

L'ensemble des lois limites possibles pour $S_n$ est l'ensemble des lois stables.

Th: S'il existe 2 suites $(a_n)$ et $(b_n)>0$ et une v.a. $Z$ telle que :

$$b_n^{-1}(S_n-a_n)\xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}}Z$$

$b_n=$ constante de renormalisation

alors, on dit que $Z$ suit une loi $\alpha$-stable ($\alpha \in [0, 2]$)
ie $\exists\, \gamma \in \mathbb{R}$, $\beta \in [-1, 1]$, $c > 0$, tq :

c = paramètre $\quad \varphi_Z(t) = \exp\left(i\gamma t - c|t|^\alpha\left(1 - i\beta\, \underbrace{\mathrm{sign}(t)}_{=\{1,-1\}}\, \ell(t,\alpha)\right)\right)$

avec
$$\ell(t,\alpha) = \begin{cases} \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) & \text{si } \alpha \neq 1 \\ -\frac{2}{\pi}\ln(|t|) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

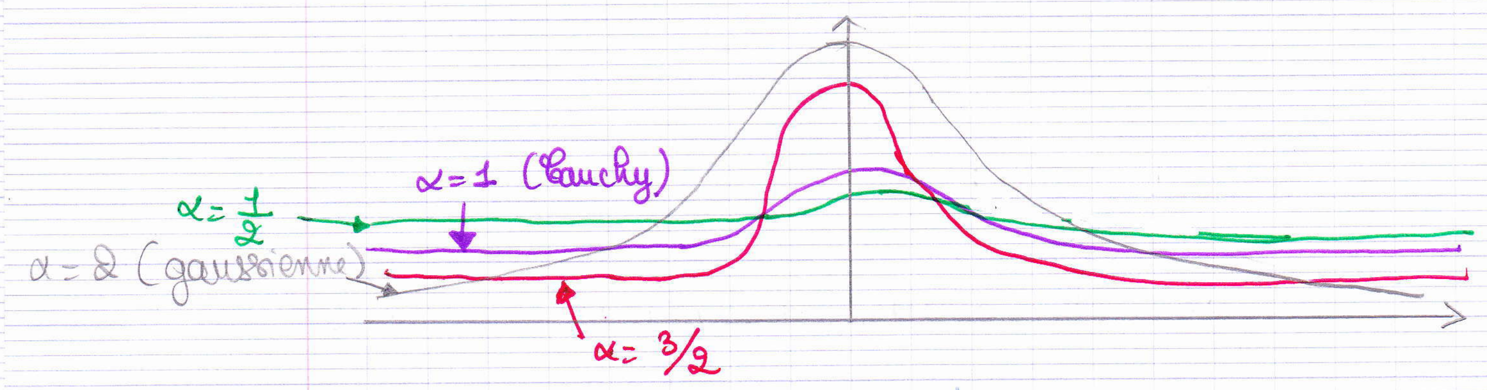
Rq : • Dans le cas $\alpha = 2$, on trouve :
$$\varphi_Z(t) = \exp(i\gamma t - ct^2)$$
la fonction caractéristique de $\mathcal{N}(\gamma, 2c)$. (à vérifier en exo 12). $\quad c = \frac{1}{2}\sigma^2$

• cas $\alpha = 1$, $\gamma = 0$ :
$$\varphi_Z(t) = \exp\left(-c|t|\left(1 + i\beta\frac{2}{\pi}\,\mathrm{sign}(t)\ln(t)\right)\right)$$

$Z$ suit une loi de Cauchy. (somme de Cauchy = Cauchy)

cas très important → • Dans le cas $\beta = 0$ (la symétrique), $\gamma = 0$ et $\alpha \in [0, 2]$ : $\quad \varphi_Z(t) = \exp(-c|t|^\alpha)$

On note $Z \sim G_\alpha$ la loi $\alpha$-stable symétrique.




• $c$ est appelé "paramètre de dispersion" ($c > 0$)

def : La fonction de répartition $F$ appartient au domaine d'attraction d'une loi $\alpha$-stable $G_\alpha$, $F \in DA(\alpha)$, si lorsque $X_1, \dots, X_n \sim F$ iid, $\exists$
$\alpha > 0$

ex : zéro-stable, dirac en 0

$(a_n)$ et $(b_n) > 0$ tq : $b_n^{-1}(S_n - a_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} Z \sim G_\alpha$

domaine d'attraction est un ensemble de lois.

**Rq :** $DA(2)$ est le domaine d'attraction de la loi normale composé de toutes les lois de variance finie (= carré intégrable, ordre de régularité $p \geq 2$).

## D - Théorème de la Limite Centrale, cas général. (Gnedenko - Kolmogorov, Feller).

$F \in DA(2) \Leftrightarrow F$ est de variance finie ou $F$ est de variance infinie et $F \in RV(2)$.

$F \in DA(\alpha)$ pour $\alpha \in ]0,2[ \Leftrightarrow F \in RV(\alpha)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-F(x)}{1-F(x)+F(-x)} = p \in [0,1]$ (condition de queues de distribution équilibrées).

probabilité

Dans ces cas, il existe une suite $L \in R_0$ (variation lente) telle que : $\underbrace{(L(n))^{-1} n^{-\frac{1}{\alpha}}}_{= \frac{1}{L(n)\, n^{\frac{1}{\alpha}}}} S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} G_\alpha$

(avec $\mu = \mathbb{E}[X] = 0$ si elle existe

seuil $= n^{\frac{1}{\alpha}} \times L(n)$

si $\alpha = 2$ et variance finie, $L(n) = 1$

si $\alpha = 2$ et variance infinie, $L(n) = \log(n)$

**Rq :** Si $F \in DA(\alpha)$ (pour nous $F \in RV(\alpha)$) alors pour $X \sim F$, $\mathbb{E}[|X|^p] < +\infty \quad \forall p < \alpha$

$\mathbb{E}[|X|^\alpha] = +\infty \quad (\alpha < 2)$

**Principes de grandes déviations (théorème) :** Soit $F \in DA(\alpha)$ de variance infinie (pour nous $F \in RV(\alpha)$

$\alpha \leq 2$), on choisit $x = L(n)\, n^{\frac{1}{\alpha}}\, x_n$ avec $x_n \longrightarrow +\infty$ et on obtient :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\mathbb{P}(S_n > L(n)\, n^{\frac{1}{\alpha}}\, x_n)}{\mathbb{P}(M_n > L(n)\, n^{\frac{1}{\alpha}}\, x_n)} = 1.$$

__Rq:__ → Les extrêmes des sommes partielles sont déterminés par ceux des maximas.

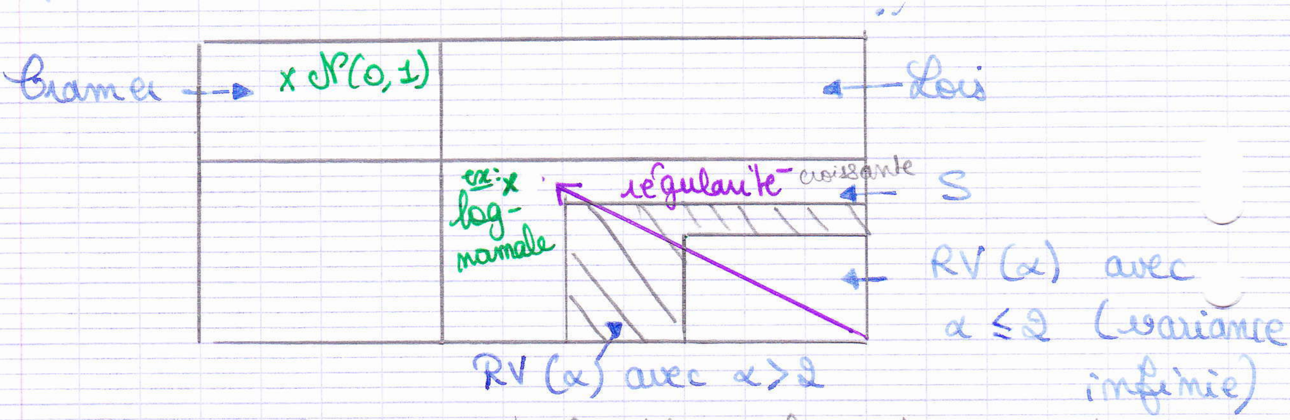
→ Si $F \in DA(\alpha)$ de variance infinie alors $F \in S$.

→ Si $F \in RV(\alpha)$ avec $\alpha > 2$ (variance finie et $F \in S$), $\mu = \mathbb{E}[X] = 0$ alors :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\mathbb{P}(S_n > \sqrt{n}\, x_n)}{\mathbb{P}(M_n > \sqrt{n}\, x_n)} = 1$$

pour $x_n \longrightarrow +\infty$ aussi rapidement que $\log(n)$.

→ Si F est log-normale, le résultat reste vrai lorsque $x_n \longrightarrow +\infty$ plus rapidement que toute puissance de n.




plus la régularité est faible, plus le comportement des extremas est important pour le comportement de la somme partielle

En dehors de RV(α) avec α ≤ 2 (variance infinie), le niveau du seuil est $\sqrt{n}$, sinon il est d'ordre "$n^{\frac{1}{\alpha}}$" ordre de grandeur des évé rares

Il faut fixer α pour pouvoir étudier le comportement des extrêmes de $(S_n)$.

$\sqrt{n}$ = ordre de grandeur des événements rares.
Si $F \in RV(\alpha)$, $\alpha \leq 2$ (variance infinie) alors les événements rares sont beaucoup plus importants que ceux dont le seuil est de $\sqrt{n}$

prob pour $F \in RV(\alpha)$ $\alpha \leq 2$ (variance infinie) :
$\alpha$ inconnu donc à estimer

ex de lois dans $DA(\alpha)$ avec variance infinie :

→ Pareto $(\alpha, K)$ avec $0 < \alpha \leq 2$, $K > 0$ :
$$\bar{F}(x) = \left(\frac{K}{K+x}\right)^\alpha, \ \forall x > 0.$$

→ Burr $(\Gamma, \alpha, K)$ avec $\Gamma > 0$, $0 < \alpha \leq 2$, $K > 0$ :
$$\bar{F}(x) = \left(\frac{K}{K+x^\Gamma}\right)^{\alpha/\Gamma} \quad \forall x > 0.$$

→ Lois $\alpha$-stables symétriques $G_\alpha$ (pour $\alpha < 2$) :
$$\varphi_x(t) = \exp(-c|t|^\alpha), \ c > 0, \forall t \in \mathbb{R}$$

* Cauchy $= G_1$.

ex 12 : Vérifier que $G_\alpha \in RV(\alpha)$.
indice : Montrer que $G_\alpha \in DA(\alpha) \subset RV(\alpha)$.

## III Lois limites pour les maximas

Nous venons de voir dans quels cas la loi des extrêmes de $S_n$ était caractérisée par celle des maximas $M_n$.
On étudie désormais la loi des extrêmes des