École Polytechnique

Élèves voie 2

Semestre d'accueil

Équations différentielles.

Résumé de cours

Alexandre POPIER, Olivier WINTENBERGER

Année : 2006-2007

Ce cours s'adresse aux étudiants étrangers de l'École Polytechnique en première année. Ce n'est pas un cours complet sur les équations différentielles. Nous nous limitons à des équations avec des solutions à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ et aux problèmes d'existence et d'unicité des solutions. De plus nous ne donnons pas les « traditionnelles » méthodes de résolution explicite des équations, et nous n'abordons pas les problèmes de dépendance par rapport aux paramètres, de stabilité, de points singuliers des champs de vecteurs, etc. Enfin nous adoptons un point de vue numérique de résolution en nous focalisant sur la méthode d'Euler. Les démonstrations des résultats énoncés ont été faites en cours et ne sont pas reproduites ici. Pour avoir des compléments, nous revoyons au livre de J.P. Demailly [2] (chapitres 5, 6 et 7), dont s'inspire beaucoup ce cours, ainsi qu'aux différentes références à la fin du cours et à leurs bibliographies respectives.

Nous serions reconnaissants à tout lecteur de nous faire part des fautes qu'il aura détectées à l'adresse suivante :

- owintenb@univ-paris1.fr.

1 Introduction : modèles en écologie

Les équations différentielles se retrouvent dans de très nombreux domaines, notamment en physique (par exemple mécanique), en chimie (cinétique des réactions), ou en biologie (dynamique des populations), etc.

Ce qui suit s'inspire beaucoup du cours de Jasques Istas de troisième année « Modèles mathématiques pour l'écologie » [4]. Les modèles démographiques les plus simples concernent une population isolée. Pour tout instant t, on note $N(t)$ l'effectif d'une population à cet instant, on suppose que cet effectif est assez important pour supposer $N(t)$ réel (et non pas entier). L'évolution de cette population est décrite par une équation différentielle :

$$\frac{dN(t)}{dt} = \text{naissances - morts + migrations.}$$

S'il n'y a pas de migrations, et si les naissances et les morts sont proportionnelles à la taille de la population, on obtient une équation linéaire :

$$\frac{dN(t)}{dt} = aN(t) - bN(t).$$

Dans cette approche (modèle de Malthus (1766-1834)), la population croît ou décroît exponentiellement vite, ce qui n'est pas réaliste, surtout à long terme. On peut alors ajouter une correction lorsque la population grossit : il existe une taille idéale, dite *capacité biotique*. En dessous de cette capacité, la population augmente, au dessus elle diminue. Un modèle possible, du à Verhulst (1804-1849) et dit *logistique*, est le suivant :

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right).$$

K est la capacité biotique et les solutions de cette équation sont :

$$N(t) = \frac{N(0)Ke^{rt}}{K + N(0)(e^{rt} - 1)}.$$

Cette équation admet deux *points d'équilibre* 0 et K. En effet si $N(0) = 0$, la population reste nulle au cours du temps. Si $N(0) = K$, la taille de la population reste stable, égale à K. De plus, si on voit que si $N(0) > 0$, alors $\lim_{t \to +\infty} N(t) = K$. Ceci signifie que K est un point d'équilibre *stable*, tandis que 0 est *instable* : si $N(0)$ est proche de K, la solution reste proche de K; si $N(0)$ est proche de 0, elle ne reste pas près de zéro.

On peut aussi faire entrer en jeu l'interaction avec d'autres populations. On va se limiter à deux populations avec une interaction proie-prédateur. Le premier modèle est du à Volterra (1860-1940) et est appelé *modèle de Lotka-Volterra*, car il a été introduit presque simultanément par Lotka comme représentation d'un système chimique exhibant un caractère oscillant. Ce modèle est basé sur les hypothèses suivantes :

- sans prédateurs, la population des proies croît exponentiellement vite (dynamique de Malthus);
- sans proies, le taux de morts parmi les prédateurs est proportionnel à la taille de la population;

– le taux de disparition des proies est proportionnel au nombre de rencontres entre une proie et un prédateur, supposé lui-même proportionnel au produit des deux populations;
– la taux de croissance des prédateurs est aussi proportionnel au nombre de rencontres entre proie et prédateur.

Si N est l'effectif des proies et P celui des prédateurs, on obtient le système d'équations :

$$\begin{aligned}\frac{dN(t)}{dt} &= N(a-bP),\\ \frac{dP(t)}{dt} &= P(cN-d),\end{aligned}$$

a, b, c et d étant quatre constantes positives. Ce système dynamique a des propriétés très particulières. Il a deux points d'équilibre $(0,0)$ et $(d/c, a/b)$, et dans le *plan de phase*, i.e. dans le plan dont les coordonnées sont N et P, les trajectoires d'un mobile données par le système, sont fermées, donc N et P sont périodiques (voir l'exercice à la fin de cours). Ce modèle a lui aussi ces limites. En effet en l'absence de prédateurs, il n'est pas réaliste de penser que la population des proies va croître indéfiniment.

À travers ces exemples, nous avons vu différents cas : équations linéaires, non linéaires, systèmes d'équations, sans savoir pourquoi ces équations avaient des solutions, ni, le cas échéant, si elles admettaient une unique solution. C'est l'objet du paragraphe suivant.

2 Existence, unicité

Nous allons donc maintenant aborder un point crucial : l'existence et l'unicité des solutions. Pour cela, nous nous plaçons dans la cadre suivant : U désigne un ouvert de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m$, $f : U \to \mathbb{R}^m$ est une application continue. On considère l'équation différentielle

(E) $$y' = f(t,y),\ (t,y)\in U,\ t\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R}^m.$$

2.1 Quelques définitions et premières propriétés

Définition 1 *Une solution de (E) sur un intervalle $I\subset\mathbb{R}$ est une fonction dérivable $y : I\to\mathbb{R}^m$ telle que*

1. $\forall t\in I,\ (t,y(t))\in U,$
2. $\forall t\in I,\ y'(t) = f(t,y(t)).$

L'inconnue de (E) est donc une fonction. Ici y ne dépend que d'une seule variable t, on parle d'équation différentielle *ordinaire* (lorsqu'il y a plusieurs variables, on parle d'équation aux dérivées partielles).

Si on écrit $y = (y_1, \dots y_m)$ et $f = (f_1, \dots f_m)$, alors (E) est un système différentiel du premier ordre à m fonctions inconnues $y_1, \dots, y_m$:

(E) $$\left\{\begin{aligned} y_1'(t) &= f_1(t, y_1(t), \dots y_m(t))\\ &\vdots\\ y_m'(t) &= f_m(t, y_1(t), \dots y_m(t))\end{aligned}\right.$$

Problème de Cauchy : étant donné un point $(t_0, y_0) \in U$, le problème de Cauchy consiste à trouver une solution $y : I \to \mathbb{R}^m$ de (E) sur un intervalle I contenant t_0 dans son intérieur, telle que $y(t_0) = y_0$.

Souvent, concrètement, la variable t représente le temps, et $y = (y_1, \ldots, y_m)$ est une famille de paramètres décrivant l'état d'un système matériel donné.

2.1.1 Solutions maximales

Définition 2 *Soient $y : I \to \mathbb{R}^m$, $\tilde{y} : \tilde{I} \to \mathbb{R}^m$ des solutions de (E). On dit que $\tilde{y}$ est un* prolongement *de y si $I \subset \tilde{I}$ et $\tilde{y}|_I = y$.*

Définition 3 *On dit qu'une solution $y : I \to \mathbb{R}^m$ est* maximale *si y n'admet pas de prolongement $\tilde{y} : \tilde{I} \to \mathbb{R}^m$, avec $I \subsetneq \tilde{I}$.*

De ces définitions découle directement le résultat suivant :

Théorème 4 *Toute solution y se prolonge en une solution maximale $\tilde{y}$ (pas nécessairement unique).*

2.1.2 Solutions globales

On suppose ici que l'ouvert U est de la forme $U = J \times U'$ où J est un intervalle de $\mathbb{R}$ et U' un ouvert de $\mathbb{R}^m$.

Définition 5 *Une solution* globale *est une solution définie sur l'intervalle J tout entier.*

Remarque 6 *Toute solution globale est maximale, mais la réciproque est fausse.*

Exemple : (E) : $y' = y^2$ sur $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Cherchons les solutions de cette équation.

- Nous avons la solution globale $y(t) = 0$.
- Si y ne s'annule pas, (E) s'écrit $\dfrac{y'}{y^2} = 1$, d'où par intégration

$$-\frac{1}{y(t)} = t + C, \quad y(t) = -\frac{1}{t + C}.$$

  Cette formule donne deux solutions, définies respectivement sur $]-\infty, -C[$ et $]-C, +\infty[$; ces solutions sont maximales, mais pas globales.
  En fait $y(t) = 0$ est la seule solution globale.

2.1.3 Régularité des solutions

Rappelons qu'une fonction est dite de classe C^k si elle admet des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre k.

Théorème 7 *Si $f : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ est de classe C^k, toute solution de (E), $y' = f(t, y)$, est de classe C^{k+1}.*

2.2 Théorème d'existence

On rappelle que l'on considère une équation différentielle

$$y' = f(t, y) \tag{E}$$

où $f : U \to \mathbb{R}^m$ est continue et U est un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$.

Lemme 8 *Une fonction $y : I \to \mathbb{R}^m$ est une solution du problème de Cauchy de données initiales (t_0, y_0) si et seulement si*

1. *y est continue et pour tout $t \in I$, $(t, y(t)) \in U$;*
2. *et pour tout $t \in I$,*

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(r, y(r))dr. \tag{1}$$

Pour résoudre (E), on va plutôt chercher à résoudre (1).

On va d'abord montrer qu'une solution passant par $(t_0, y_0) \in U$ ne peut pas s'éloigner « trop vite » de y_0. On note $\| \ \|$ une norme (quelconque) sur $\mathbb{R}^m$ et $B(x, r)$ (respectivement $\bar{B}(x, r)$) la boule ouverte (respectivement fermée) de centre x et de rayon r. Comme U est ouvert, il existe un cylindre

$$C_0 = [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times \bar{B}(y_0, r_0) \subset U.$$

L'ensemble C_0 est fermé et borné dans $\mathbb{R}^{m+1}$, donc compact. Ceci entraîne que f est bornée sur C_0, i.e.

$$M = \sup_{(t,y)\in C_0} \|f(t, y)\| < +\infty.$$

On désigne par $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times \bar{B}(y_0, r_0) \subset C_0$ un cylindre de demi-longueur $T \leq T_0$.

Définition 9 *On dit que C est un* cylindre de sécurité *pour l'équation (E) si toute solution $y : I \to \mathbb{R}^m$ du problème de Cauchy $y(t_0) = y_0$ avec $I \subset [t_0 - T, t_0 + T]$, reste contenue dans $\bar{B}(y_0, r_0)$.*

Lemme 10 *Pour que C soit un cylindre de sécurité, il suffit de prendre*

$$T \leq \min\left(T_0, \frac{r_0}{M}\right).$$

2.2.1 Solutions approchées, méthode d'Euler

On cherche à construire une solution approchée de (E) sur un intervalle $[t_0, t_0 + T]$. Numériquement c'est cette solution approchée qui sera implémentée dans l'ordinateur. On se donne pour cela une subdivision

$$t_0 < t_1 < \ldots < t_{N-1} < t_N = t_0 + T.$$

Les pas successifs sont notés

$$h_n = t_{n+1} - t_n,\ 0 \leq n \leq N-1,$$

et on pose

$$h_{\max} = \max(h_0, \ldots, h_{N-1}).$$

La méthode d'EULER (1707-1783) consiste à construire une solution approchée y affine par morceaux comme suit. Soit $y_n = y(t_n)$. On confond la solution avec sa tangente au point (t_n, y_n) :

$$y(t) = y_n + (t - t_n) f(t_n, y_n),\ t \in [t_n, t_{n+1}).$$

Partant de la donnée initiale y_0, on calcule donc les y_n par récurrence en posant pour $0 \leq n \leq N-1$:

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h_n f(t_n, y_n) \\ t_{n+1} = t_n + h_n \end{cases}$$

La solution approchée y s'obtient graphiquement en traçant les segments joignant les points (t_n, y_n) et (t_{n+1}, y_{n+1}).

On construit de même une solution approchée sur $[t_0 - T, t_0]$ en prenant des pas $h_n < 0$.

Proposition 11 *Si $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times \bar{B}(y_0, r_0)$ est un cylindre de sécurité toute solution approchée y donnée par la méthode d'Euler est contenue dans $\bar{B}(y_0, r_0)$.*

Définition 12 *Soit $y : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ une fonction C^1 par morceaux (ceci signifie qu'il existe une subdivision $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_N = b$ de $[a, b]$ telle que pour tout $1 \leq i \leq N$, la restriction $y|_{[a_i, a_{n+1}]}$ soit de classe C^1). On dit que y est une ε-*solution approchée *de (E) si*

1. *$\forall t \in [a, b]$, $(t, y(t)) \in U$,*
2. *$\forall n$, $\forall t \in]a_i, a_{i+1}[$, $\|y'(t) - f(t, y(t))\| \leq \varepsilon$.*

Soit ω_f le module de continuité de f sur C, défini par

$$\omega_f(u) = \max\left\{\|f(t_1, y_1) - f(t_2, y_2)\| ; ((t_1, y_1), (t_2, y_2)) \in C^2 \ / \ |t_1 - t_2| + \|y_1 - y_2\| \leq u\right\}.$$

Comme C est compact, f est uniformément continue sur C, ainsi

$$\lim_{u \to 0} \omega_f(u) = 0.$$

Proposition 13 *Soit $y : [t_0 - T, t_0 + T] \to \mathbb{R}^m$ une solution approchée construite par la méthode d'Euler avec pas maximum $h_{\max}$. Alors l'erreur ε vérifie $\varepsilon \leq \omega_f((M+1)h_{\max})$.*

Ainsi l'erreur tend vers zéro quand le pas maximum tend vers 0.

Proposition 14 *Soit $y_p : [t_0 - T, t_0 + T] \to \mathbb{R}^m$ une suite de solutions ε_p-approchées contenues dans le cylindre de sécurité C, telles que $y_p(t_0) = y_0$ et $\lim_{p \to +\infty} \varepsilon_p = 0$. On suppose que la suite y_p converge uniformément sur $[t_0 - T, t_0 + T]$ vers une fonction y. Alors y est solution exacte du problème de Cauchy pour l'équation (E).*

2.2.2 Théorème de Cauchy-Peano-Arzela

Nous allons montrer que si f est continue, alors le problème de Cauchy admet au moins une solution locale (et donc maximale par prolongement). Le résultat s'appuie sur le théorème d'Ascoli, dont un corollaire est :

Proposition 15 (Ascoli) *On suppose que E et F sont deux espaces métriques compacts. Soit $\phi_p : E \to F$ une suite d'applications k-lipschitziennes, où $k \geq 0$ est une constante donnée. Alors on peut extraire de ϕ_p une sous-suite ϕ_{p_n} uniformément convergente, et la limite est une application k-lipschitzienne.*

Autrement dit, l'ensemble des applications k-lipschitziennes de E dans F, mnui de la distance uniforme, est un espace métrique compact.

Théorème 16 (Cauchy-Peano-Arzela) *Soit $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times \bar{B}(y_0, r_0)$ un cylindre de sécurité pour (E) $y' = f(t, y)$. Alors il existe une solution $y : [t_0 - T, t_0 + T] \to \bar{B}(y_0, r_0)$ de (E) avec condition initiale (t_0, y_0).*

On utilise la proposition précédente pour montrer que de la suite (y_p) de solutions ε_p approchées construites par la méthode d'Euler, on peut extraire une sous-suite uniformément convergente vers une solution exacte de (E). Appliquant le théoremème 4, on obtient

Corollaire 17 *Par tout point $(t_0, y_0) \in U$, il passe au moins une solution maximale $y : I \to \mathbb{R}^m$ de (E). De plus, l'intervalle de définition I de toute solution maximale est ouvert (mais en général il n'y a pas unicité de ces solutions maximales).*

Le fait que l'intervalle maximale I soit ouvert découle du fait que toute solution sur un intervalle non ouvert se prolonge. Si y est une solution de (E) avec condition initiale (t_0, y_0) sur $[a, b[$ avec $-\infty < a < b \leq +\infty$, alors elle est prolongeable sur un intervalle $I \supset [a, b[$ en lui raccordant une solution de (E) avec condition initiale $(a, y(a))$. Ici, il n'y a pas unicité de la solution maximale :

Exemple : soit l'équation $y' = 3|y|^{2/3}$. Le problème de Cauchy de condition initiale $y(0) = 0$ admet alors au moins deux solutions maximales :

$$y_{(1)}(t) = 0, \quad y_{(2)}(t) = t^3, \quad t \in \mathbb{R}.$$

2.3 Théorème d'existence et d'unicité de Cauchy-Lipschitz

Ici on suppose en plus que f est LOCALEMENT LIPSCHITZIENNE en y. Ceci signifie que pour tout point $(t_0, y_0) \in U$ il existe un cylindre $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times \bar{B}(y_0, r_0) \subset U$ et une constante $k = k(t_0, y_0) \geq 0$ tels que f soit k-lipschitzienne en y sur C :

$$\forall (t, y_1), (t, y_2) \in C, \ \|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq k \|y_1 - y_2\|.$$

Sous ces hypothèses sur f, nous allons montrer que la solution du problème de Cauchy est nécessairement unique, et que de plus toute suite de solutions ε-approchées avec ε tendant vers 0, converge nécessairement vers la solution exacte.

2.3.1 Lemme de Gronwall. Convergence et unicité locales

Soit $C_0 = [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times \bar{B}(y_0, r_0) \subset U$ un cylindre sur lequel f est k-lipschitzienne en y et soit $M = \sup_{C_0} \|f\|$. On se donne $\varepsilon > 0$ et on considère des solutions y_1 et y_2 respectivement ε_1 et ε_2 approchées du problème de Cauchy de donnée initiale (t_0, y_0), avec $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \leq \varepsilon$.

On a alors $\|y_i'\| \leq M + \varepsilon$, et les graphes de y_1 et y_2 restent contenus dans le cylindre

$$C = [t_0 - T, t_0 + T] \times \bar{B}(y_0, r_0) \subset C_0$$

dès que $T \leq \min\left(T_0, \dfrac{r_0}{M + \varepsilon}\right)$, ce qu'on suppose désormais.

Lemme 18 (Gronwall) *Sous les hypothèses précédentes, on a*

$$\|y_2(t) - y_1(t)\| \leq (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \frac{e^{k|t - t_0|} - 1}{k}, \quad \forall t \in [t_0 - T, t_0 + T].$$

Théorème 19 (Cauchy-Lipschitz) *Si $f : U \to \mathbb{R}^m$ est localement lipschitzienne en y, alors pour tout cylindre de sécurité $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times \bar{B}(y_0, r_0)$ comme ci-dessus, le problème de Cauchy avec donnée initiale (t_0, y_0) admet une unique solution exacte $y : [t_0 - T, t_0 + T] \to U$. De plus, toute suite y_p de solutions ε_p-approchées avec ε_p tendant vers 0, converge uniformément vers la solution exacte y sur $[t_0 - T, t_0 + T]$.*

2.3.2 Autre démonstration

Dans ce paragraphe, nous donnons une autre démonstration du théorème 19, basée sur le théorème du point fixe. $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times \bar{B}(y_0, r_0) \subset C_0$ désigne toujours un cylindre de sécurité de (E). On note par

$$\mathcal{C}^{\mathbf{0}} = C^0([t_0 - T, t_0 + T]; \bar{B}(y_0, r_0)),$$

l'ensemble des fonctions continues de $[t_0 - T, t_0 + T]$ dans $\bar{B}(y_0, r_0)$, muni de la distance d de la convergence uniforme. C'est un espace complet. À toute fonction $y \in \mathcal{C}^{\mathbf{0}}$, associons la fonction $\Phi(y)$ définie par

$$\Phi(y)(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, y(u)) du, \ t \in [t_0 - T, t_0 + T].$$

D'après le lemme 8, y est une solution de (E) si et seulement si y est un point fixe de Φ. On va donc essayer d'appliquer le théorème du point fixe. Observons que

$$\|\Phi(y)(t) - y_0\| = \| \int_{t_0}^{t} f(u, y(u)) du \| \leq M|t - t_0| \leq MT \leq r_0;$$

donc $\Phi(y) \in \mathcal{C}^{\mathbf{0}}$. L'opérateur Φ envoie donc $\mathcal{C}^{\mathbf{0}}$ dans $\mathcal{C}^{\mathbf{0}}$. Soient maintenant $y, z \in \mathcal{C}^{\mathbf{0}}$ et $y_p = \Phi^p(y)$, $z_p = \Phi^p(z)$. On a

$$\begin{aligned} \|y_1(t) - z_1(t)\| &= \| \int_{t_0}^{t} (f(u, y(u)) - f(u, z(u))) du \| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^{t} k \|y(u) - z(u)\| du \right| \leq k|t - t_0| d(y, z). \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned}\|y_2(t)-z_2(t)\| &\leq \left|\int_{t_0}^{t} k\|y_1(u)-z_1(u)\|du\right| \\ &\leq \left|\int_{t_0}^{t} kk|u-t_0|d(y,z)du\right| = k^2\frac{|t-t_0|^2}{2}d(y,z).\end{aligned}$$

Par récurrence sur p, on vérifie aussitôt que

$$\|y_p(t)-z_p(t)\| \leq k^p\frac{|t-t_0|^p}{p!}d(y,z),$$

et en particulier

$$d(\Phi^p(y),\Phi^p(z)) = d(y_p,z_p) \leq k^p\frac{T^p}{p!}d(y,z). \tag{2}$$

Donc Φ^p est lipschitzienne sur $\mathcal{C}^{\mathbf{0}}$ de rapport $k^p\frac{T^p}{p!}$. De plus, il existe p assez grand pour que $k^p\frac{T^p}{p!} < 1$. Donc pour cette valeur de p, Φ^p est contractante de $\mathcal{C}^{\mathbf{0}}$ dans $\mathcal{C}^{\mathbf{0}}$, et $\mathcal{C}^{\mathbf{0}}$ est un espace métrique complet. Donc Φ admet un unique point fixe y.

Nous avons donc redémontré le théorème de Cauchy-Lipschitz. De plus, d'après (2), on voit que pour toute fonction $z \in \mathcal{C}^{\mathbf{0}}$, la suite itérée $z_p = \Phi^p(z)$ converge uniformément vers la solution exacte y du problème de Cauchy.

2.3.3 Unicité globale

Le théorème d'unicité locale entraîne facilement un résultat d'unicité maximale, au moyen d'un raisonnement de connexité.

Théorème 20 *Soient $y_1, y_2 : I \to \mathbb{R}^m$ deux solutions de (E), avec f localement lipschitzienne en y. Si y_1 et y_2 coïncident en un point de I, alors $y_1 = y_2$ sur I.*

Corollaire 21 *Si f est localement lipschitzienne en y sur U, pour tout point $(t_0, y_0) \in U$, il passe une unique solution maximale $y : I \to \mathbb{R}^m$ et une seule.*

Géométriquement, cela signifie que deux solutions maximales ne peuvent pas se couper. Cette unique solution n'est toutefois pas nécéssairement globale.

2.3.4 Condition suffisante d'existence de solutions globales

Ce qui suit est une condition d'existence utile pour les solutions globales, reposant sur une hypothèse de Lipschitz « semi-globale » de $f(t,y)$ relativement à y. On peut montrer que cette condition suffisante n'est pas nécessaire.

Théorème 22 *Soit $f : U \to \mathbb{R}^m$ une application continue sur un ouvert produit $U = J \times \mathbb{R}^m$, où $J \subset \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert. On suppose qu'il existe une fonction continue*

$k : J \to \mathbb{R}_+$ telle que pour tout $t \in J$ fixé, l'application $y \mapsto f(t,y)$ soit lipschitzienne de rapport $k(t)$ sur $\mathbb{R}^m$.

Alors l'unique solution maximale de l'équation $y' = f(t,y)$ est globale (i.e. définie sur J tout entier).

Exemples

- Montrer que toute solution maximale de l'équation différentielle $y' = t\sqrt{t^2+y^2}$, $(t,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, est globale.
- On définit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $f(y) = e$ si $y \leq e$ et $f(y) = y \ln y$ si $y \geq e$. Montrer que f n'est pas lipschitzienne au voisinage de 0. Déterminer explicitement les solutions maximales de l'équation $y' = f(t,y)$. La condition suffisante du théorème précédent est-elle nécessaire ?

2.4 Équations différentielles d'ordre supérieur à un

Un système différentiel d'ordre p dans $\mathbb{R}^m$ est une équation de la forme

$$y^{(p)} = f(t, y, y', \ldots, y^{(p-1)}), \tag{3}$$

où $f : U \to \mathbb{R}^m$ est une application continue définie sur un ouvert $U \subset \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^m)^p$. Une solution de (3) sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ est une application $y : I \to \mathbb{R}^m$ p-fois dérivable, telle que

1. $\forall t \in I$, $y(t), y'(t), \ldots, y^{(p-1)}(t) \in U$;
2. $\forall t \in I$, $y^{(p)}(t) = f'(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(p-1)}(t))$.

Si f est de classe C^k, les solutions y sont de classe C^{k+p}. Ce système (3) est équivalent au système différentielle d'ordre 1

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{dY_0}{dt} & = & Y_1 \\[2ex] \dfrac{dY_1}{dt} & = & Y_2 \\[2ex] & \cdots & \\[2ex] \dfrac{dY_{p-2}}{dt} & = & Y_{p-1} \\[2ex] \dfrac{dY_p}{dt} & = & f(t, Y_0, Y_1, \ldots, Y_{p-1}) \end{array}\right. \tag{4}$$

si l'on pose $Y_0 = y$, $Y_1 = y', \ldots$. Le système (4) peut encore s'écrire $Y' = F(t,Y)$ avec

$$\begin{aligned} & Y = (Y_0, Y_1, \ldots, Y_{p-1}) \in (\mathbb{R}^m)^p \\ & F = (F_0, F_1, \ldots, F_{p-1}) : U \to (\mathbb{R}^m)^p \\ & F_0(t,Y) = Y_1, \ldots, F_{p-2}(t,Y) = Y_{p-1}, \\ & F_{p-1}(t,Y) = f(t,Y). \end{aligned}$$

Tous les résultats énoncés précédemment (théorèmes 16, 19, 20 et 22, corollaires 17 et 21) s'appliquent si la fonction F remplit les hypothèses de ces résultats.

Remarque 23 *Pour résoudre le problème de Cauchy lié au système 4, il faut connaître* $Y(t_0) = (Y_0(t_0), Y_1(t_0), \dots, Y_{p-1}(t_0))$*, donc disposer des données*

$$y(t_0), y'(t_0), \dots, y^{(p-1)}(t_0),$$

c'est-à-dire les valeurs à l'instant t_0 des $p-1$ premières dérivées de y.

3 Retour sur les exemples

3.1 Équations linéaires

Dans le modèle de Malthus, nous avions affaire à une équation linéaire :

$$\frac{dN(t)}{dt} = (a-b)N(t).$$

Cet exemple rentre dans la catégorie plus générale des systèmes différentiels linéaires du premier ordre dans $\mathbb{R}^m$:

$$\frac{dY(t)}{dt} = A(t)Y + B(t), \tag{5}$$

où

$$A(t) = (a_{ij}(t))_{1 \le i,j \le m} \in \mathbb{R}^{m \times m}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_m(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m.$$

Les fonctions A et B sont continues, donc la fonction $f(t,Y) = A(t)Y + B(t)$ est lipschitzienne en Y de constante $k(t) = |||A(t)|||$.

Théorème 24 *Pour tout point $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^m$, il passe une solution maximale unique, définie sur I tout entier.*

Si le système est dit sans second membre, i.e. $B = 0$, alors l'ensemble des solutions maximales est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension m : l'application qui à Y solution maximale associe $Y(t_0)$, est un isomorphisme linéaire. Dans le cas général, si $Y_{(1)}$ est une solution globale du système (5), alors l'ensemble des solutions est de la forme $Y_{(1)} + Z$ avec Z solution maximale du système sans second membre.

Le système sans second membre est résoluble explicitement au moins dans les cas suivants :

- si A est constante, alors les solutions sont de la forme $Y(t) = \exp((t-t_0)A)Y(t_0)$, où exp désigne l'exponentielle de matrice définie sur $\mathbb{R}^{m \times m}$ par :

$$\exp(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B^n}{n!}.$$

– si $A(t)A(u) = A(u)A(t)$ pour tous t, u dans I, alors

$$Y(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} A(s)ds\right) Y(t_0) = R(t, t_0)Y(t_0).$$

Une solution particulière s'obtient par la méthode dite de *variation des constantes*. On la cherche sous la forme

$$Y_{(1)}(t) = R(t, t_0)V(t) \Rightarrow R(t, t_0)V'(t) = B(t).$$

On obtient alors

$$Y_{(1)}(t) = R(t, t_0) \int_{t_0}^{t} R(t_0, u)B(u)du = \int_{t_0}^{t} R(t, u)B(u)du.$$

3.2 Modèle de Verlhust, cas non linéaire

Pour les équations non linéaires, il n'existe pas toujours de solution explicite de l'équation (E), sauf dans toute une série de cas particuliers (équation de Riccati, Bernoulli, homogène, etc.), qu'on ne donne pas dans ce cours (voir les références en fin de cours).

Néanmoins le raisonnement qui suit doit être systématiquement fait pour étudier une équation non linéaire. Nous allons le faire dans le cas du modèle de Verlhust :

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) = rN(t) - \frac{r}{K}N(t)^2 = f(N(t)).$$

- **Étude de** f : ici f est bien localement lipschitzienne, donc le théorème de Cauchy-Lipschitz et son corollaire 21 s'appliquent : en tout point N_0, il passe une unique solution maximale $N : I \to \mathbb{R}$ telle que $N(0) = N_0$.
- **Recherche d'éventuel point fixe** : $f(0) = f(K) = 0$. Donc il y a deux solutions globales constantes $Y_{(0)}(t) = 0$ et $Y_{(K)}(t) = K$. Le corollaire 21 entraîne aussi que si $N_0 \notin \{0, K\}$ alors pour tout t, $N(t) \notin \{0, K\}$.
- **Recherche de solutions globales** : si $N_0 \in]0, K[$, nécessairement pour tout t, $N(t) \in]0, K[$, et dans ce cas, toute solution maximale est globale, d'après le corollaire 17. En effet comme la solution N est bornée, si $I \neq \mathbb{R}$, on peut prolonger la fonction N.
- En revanche si $N_0 \notin [0, K]$, il n'y a aucune raison qu'une solution maximale soit globale.

Dans le cas du modèle de Verlhust, la fonction f a une partie linéaire, qu'on peut (et même doit) faire disparaître par un changement de fonction. Plus généralement, supposons que f soit de la forme $f(t, y) = a(t)y + g(t, y)$. Si $y : I \to \mathbb{R}^m$ est une solution maximale de (E), alors $z : I \to \mathbb{R}^m$ définie par

$$z(t) = \exp\left(-\int_0^t a(s)ds\right) y(t)$$

est solution de l'équation

$$\begin{aligned} z'(t) &= -a(t)z(t) + a(t)z(t) + \exp\left(-\int_0^t a(s)ds\right) g(t, y(t)) \\ &= \exp\left(-\int_0^t a(s)ds\right) g\left(t, \exp\left(\int_0^t a(s)ds\right) z(t)\right). \end{aligned}$$

Pour le modèle de Verlhust, on obtient que $Y(t) = e^{-rt}N(t)$ satisfait

$$Y'(t) = -\frac{r}{K}\ e^{-rt}N(t)^2 = -\frac{r}{K}\ e^{rt}Y^2(t).$$

Si on exclut la solution constante égale à zéro ($N(0) = Y(0) \neq 0$), toute solution maximale évite zéro, donc on peut diviser les deux membres par $Y^2(t)$, d'où :

$$\frac{dY'(t)}{Y^2(t)} = -\frac{r}{K}\ e^{rt} \Rightarrow \frac{1}{Y(0)} - \frac{1}{Y(t)} = \int_0^t \frac{dY'(s)}{Y^2(s)} ds = -\frac{1}{K}(e^{rt} - 1).$$

Donc

$$Y(t) = \frac{1}{\frac{1}{Y(0)} + \frac{1}{K}(e^{rt} - 1)} \Rightarrow N(t) = \frac{KN(0)e^{rt}}{K + N(0)(e^{rt} - 1)}.$$

On retrouve ainsi le résultat annoncé dans le premier paragraphe.

Exercice :
Parmi toutes ces solutions, quelles sont les solutions globales (ici prendre $t \in \mathbb{R}$ et déterminer les valeurs de $N(0) \in \mathbb{R}$ pour lesquelles une solution maximale est globale) ? Que se passe-t-il dans les autres cas ?

On veillera donc à appliquer systématiquement le raisonnement fait sur l'équation de Verlhust. Mais il faut être conscient qu'en général, il n'y a pas de solution explicite, et que pour obtenir d'autres résultats sur les solutions d'une équation non linéaire, il faut adapter le raisonnement à chaque cas particulier.

4 Exercices

Exercice :
Soit J un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : J \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ une application continue. On se propose de démontrer que toute solution maximale de l'équation différentielle $y' = f(t, y)$ est globale si f vérifie l'hypothèse suivante :

il existe des fonctions $a, b : J \to \mathbb{R}_+$ continues telles que

$$\text{(H)} \qquad \langle f(t, y), y\rangle \leq a(t)\|y\|^2 + b(t), \quad \forall (t, y) \in J \times \mathbb{R}^m,$$

où $\langle\ ,\ \rangle$ et $\|\ \|$ sont respectivement le rpoduit scalaire et la norme euclidienne standards sur $\mathbb{R}^m$.

1. Montrer que si f satisfait les hypothèses du théorème 22, alors f vérifie (H).

2. Soit $y : [t_0, t_1[\to \mathbb{R}^m$ une solution maximale à droite passant par un point (t_0, y_0) et soit $r(t) = \|y(t)\|^2$. Montrer que $r'(t) \leq 2a(t)r(t) + 2b(t)$.
   En déduire que $\|y(t)\|^2 \leq \rho(t)$ où $\rho : J \to \mathbb{R}^m$ est la solution (toujours globale) de l'équation linéaire $\rho' = 2a(t)\rho + 2b(t)$, telle que $\rho(t_0) = \|y(t_0)\|^2$.
3. Déterminer un majorant explicite de $\|y(t)\|$ lorsque a et b sont des constantes.
4. On suppose que $t_1 < \sup J$. Montrer que y et y' sont bornées sur $[t_0, t_1[$ et que ces fonctions se prolongent par continuité en t_1. Montrer que ceci conduit à une contradiction. Conclure.

Exercice :
Soient b et c deux fonctions continues sur un intervalle fixé $I = [0, T[$. Soit (S) le système différentiel linéaire à coefficients constants et avec second membre

$$\text{(S)} \qquad \begin{cases} x' = y + b(t) \\ y' = 2x - y + c(t) \end{cases}$$

1. Écrire la matrice A du système (S_0) sans second membre et calculer e^{tA}.
2. Déterminer la solution générale du système (S_0).
3. Déterminer la solution générale du système (S) pour $b(t) = 0$ et $c(t) = e^{-t}$.

Exercice :
On considère l'équation linéaire du troisième ordre

$$y''' + y'' + y' + y = \cos t,$$

où y désigne une fonction inconnue de la variable $t \geq 0$.
1. Déterminer la solution générale de l'équation sans second membre associée à cette équation.
2. À l'aide de la méthode de variation des constantes, déterminer la solution générale de l'équation.
3. Montrer qu'elle admet une solution et une seule de la forme $At\cos t + Bt\sin t$: la déterminer explicitement, et tracer son graphe.

Exercice :
Soit le système différentiel dans $\mathbb{R}^2$ défini par

$$(6) \qquad \begin{cases} x'(t) = 2(x(t) - ty(t)), \\ y'(t) = 2y(t), \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

1. Déterminer la solution globale qui passe par le point (x_0, y_0) au temps $t = 0$.
2. On utilise la méthode d'Euler avec pas constant h, démarrant au temps $t_0 = 0$. Soit (x_n, y_n) le point atteint au temps $t_n = nh$ ($n \in \mathbb{N}$).
   (a) Écrire la relation qui lie (x_{n+1}, y_{n+1}) à (x_n, y_n).

(b) Calculer explicitement (x_n, y_n) en fonction de n, h, x_0, y_0.

(c) Sans utiliser les théorèmes généraux du cours, vérifier que la solution approchée qui interpole linéairement les points (x_n, y_n) converge sur $\mathbb{R}_+$ vers la solution exacte de (6).

Dans l'exercice suivant, on traite un cas particulier d'équation non linéaire, dite de *Riccati*, pour lesquelles, si on connaît une solution particulière, on peut se ramener à une équation linéaire.

Exercice :
On considère l'équation différentielle

$$xy' - y^2 + (2x+1)y = x^2 + 2x.$$

1. Possède-t-elle une solution particulière de type polynôme?
2. Soit $y_{(1)}$ cette solution particulière. Quelle est l'équation satisfaite par z, si $y = y_{(1)} + z$?
3. Quelle l'équation satisfaite par $1/z$? En déduire la solution générale de l'équation initiale.
4. Soit f la fonction telle que $xy' = f(x, y)$. Les courbes isoclines sont les courbes $\Gamma_p : f(x, y) = p$. Quelle est l'équation de l'isocline de pente 0 dans le nouveau repère de vecteurs de base $(1, 1)$ et $(0, 1)$? Dessiner cette isocline en précisant les tangentes aux points d'abscisse 0 dans l'ancien repère.
5. Dessiner l'allure générale des solutions.
6. Soit (x_0, y_0) un point de $\mathbb{R}^2$. Combien passe-t-il de solutions maximales de classe C^1 par (x_0, y_0)? On précisera l'intervalle de définition de ces solutions et le cas échéant on indiquera les solutions globales.

Exercice : Modèle à capacité saisonnière
Une population N est soumise à une contrainte saisonnière périodique qui affecte sa capacité biotique. Le modèle proposé est le suivant :

$$\frac{dN(t)}{dt} = \alpha N(t) \left(1 - N(t)\frac{1 + \beta\cos(\gamma t)}{K}\right),$$

où α, K, γ sont des constantes positives et $0 < \beta < 1$.

1. Résoudre cette équation (indication : poser $y = 1/N$).
2. Comparer avec le modèle logistique

$$\frac{dN(t)}{dt} = \alpha N(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right).$$

Exercice : Lotka-Volterra

On considère le système d'équations :

$$\begin{aligned}\frac{dN(t)}{dt} &= N(a-bP),\\ \frac{dN(t)}{dt} &= P(cN-d),\end{aligned}$$

a, b, c et d étant quatre constantes positives.

1. Montrer que ce système se ramène à l'étude du système
$$\frac{du}{d\tau} = \gamma u(1-v), \quad \frac{dv}{d\tau} = \gamma v(u-1),$$
en posant $u = cN/d$, $v = bP/a$, $\tau = at$ et $\gamma = d/a$.
2. Justifier l'existence et l'unicité des solutions maximales du problème de Cauchy pour $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$. Quels sont les points fixes de ce système ? Que se passe-t-il si u_0 ou v_0 est nul ? En déduire $(0, 0)$ est un point fixe instable.
3. On suppose maintenant que $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \setminus (1, 1)$. Montrer qu'il existe $C > 1+\gamma$ tel que si (u, v) est une solution maximale du problème de Cauchy telle que $(u(0), v(0)) = (u_0, v_0)$, alors
$$\gamma u + v - \ln(u^\gamma v) = C.$$
En déduire que toute solution maximale est globale.
4. Cette question est plus difficile : montrer que ces solutions globales sont périodiques.
5. Discuter brièvement de la généralisation suivante :
$$\begin{aligned}\frac{dN(t)}{dt} &= N(a-bP) - \lambda N^2,\\ \frac{dN(t)}{dt} &= P(cN-d) - \mu P^2.\end{aligned}$$
C'est un modèle dit *proie-prédateur logistique*. Indication : on mettra en évidence les droites $a - bP - \lambda N = 0$ et $cN - d - \mu P = 0$, et on distinguera deux cas suivant que les droites se coupent ou non dans l'ensemble $\{(N, P);\ N > 0,\ P > 0\}$.

Exercice : Équation de Van der Pol

On considère l'équation :

$$x'' + x'(3x^2 - 1) + x = 0.$$

1. Justifier qu'on peut ramener cette équation au système différentiel d'ordre 1
$$(7) \qquad \left\{\begin{array}{l} x'(t) = y(t) - x^3(t) + x(t), \\ y'(t) = -x(t), \end{array}\right. \quad t \in \mathbb{R}.$$
2. Montrer que le problème de Cauchy admet une solution globale unique (utiliser le premier exercice).

3. On appelle trajectoire associée à une solution de (7), l'ensemble parcouru dans le plan euclidien par le point de coordonnées $(x(t), y(t))$, lorsque t parcourt $\mathbb{R}$. Montrer que les trajectoires associées à deux solutions distinctes de (7) coïncident ou n'ont aucun point commun; montrer que par chaque point du plan passe une trajectoire et une seule; montrer que si une trajectoire a un point double (i.e. correspondant à deux valeurs distinctes de t), les solutions associées à (7) sont périodiques (et tous les points sont doubles). Quelles sont les trajectoires réduites à un point?
4. Montrer que la courbe symétrique d'une trajectoire par rapport à $(0, 0)$ est encore une trajectoire.
5. On considère maintenant les sous-ensembles du plan

$$\begin{aligned}
&D^+ = \{(0, y),\ y > 0\}\,; \quad D^- = \{(0, y),\ y < 0\}\,;\\
&E_1 = \big\{(x, y);\ x > 0 \text{ et } y > x^3 - x\big\}\,; \quad \Gamma_+ = \big\{(x, x^3 - x);\ x > 0\big\}\,;\\
&E_2 = \big\{(x, y);\ x > 0 \text{ et } y < x^3 - x\big\}\,;\\
&E_3 = \big\{(x, y);\ x < 0 \text{ et } y < x^3 - x\big\}\,; \quad \Gamma_- = \big\{(x, x^3 - x);\ x < 0\big\}\,;\\
&E_4 = \big\{(x, y);\ x < 0 \text{ et } y > x^3 - x\big\}\,.
\end{aligned}$$

Soit $(x(t), y(t))$ une solution de (7). Montrer que, si $(x(t_0), y(t_0)) \in D^+$, il existe $t_4 > t_3 > t_2 > t_1 > t_0$ tels que $(x(t), y(t)) \in E_i$ pour $t \in]t_{i-1}, t_i[$, $i = 1, 2, 3, 4$, et $x(t_1), y(t_1)) \in \Gamma^+$, $(x(t_2), y(t_2)) \in D^-$, $(x(t_3), y(t_3)) \in \Gamma^-$, $(x(t_4), y(t_4)) \in D^+$.
6. Soit $y_0 > 0$ et $t_0 \in \mathbb{R}$; il existe une solution de (7) telle que $(x(t_0), y(t_0)) = (0, y_0)$; on pose $\sigma(t_0) = y(t_2)$; montrer que $\sigma(y_0)$ ne dépend que de y_0 (et non de t_0), et que σ est une application monotone continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_-$.
7. En utilisant la question 4, montrer que $(0, y_0)$ appartient à la trajectoire d'une solution périodique si et seulement si $\sigma(y_0) = -y_0$.
8. Soit $\beta > 0$ tel que pour la solution de (7) vérifiant $(x(t_0), y(t_0)) = (0, \beta)$ on ait $(x(t_1), y(t_1)) = (1, 0)$. Montrer que pour $y_0 < \beta$, on a $\sigma(y_0)^2 - y_0^2 > 0$ (regarder $\displaystyle\int_0^{t_2} \frac{d}{dt}\left[x(t)^2 + y(t)^2\right] dt$).
9. Soit y_0 grand. Soit $\mathcal{C}$ la courbe formée des arcs suivants :
   - le segment $(0, y_0)$, $(1, y_0)$;
   - l'arc de cercle de centre O passant par $(1, y_0)$ et coupant $(y = x^3 - x)$ en (x_1, y_1) avec $x_1 > 1$;
   - le segment (x_1, y_1), $(x_1, 0)$;
   - l'arc de cercle de centre O passant par $(x_1, 0)$ et coupant $(x = 1)$ en (x'_1, y'_1);
   - la tangente en (x'_1, y'_1) à cet arc de cercle qui recoupe Oy en $(0, y_2)$.

   Faire un dessin ! Montrer que la solution de (7) passant par $(0, y_0)$ est à l'intérieur de $\mathcal{C}$. En déduire que $\sigma(y_0)^2 - y_0^2 < 0$.
10. En déduire qu'il existe une trajectoire et une seule correspondant à des solutions périodiques de (7). Montrer que les trajectoires non réduites à $(0, 0)$ convergent asymptotiquement vers cette trajectoire quand t tend vers $+\infty$.

Références

[1] M. Crouzeix, A.L. Mignot, *Analyse numérique des équations différentielles.* Masson, Paris.

[2] J.P. Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles.* PUG, Grenoble.

[3] M. W. Hirsch, S. Smale, *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra.* Academic Press, New York, (1974).

[4] J. Istas, *Modèles mathématiques pour l'écologie.* Cours polycopié de l'École Polytechnique.

[5] H. Reinhard, *Équations différentielles. Fondements et applications.* Dunod, Paris.